física

preuniversitario

m. pujal carrera

teide

FÍSICA

Curso Preuniversitario

FISICA
Curso Preuniversitario

M. PUJAL CARRERA

CATEDRATICO DE FISICA
DE LA ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES, DE TARRASA
PROFESOR DE LA UNIVERSIDAD DE BARCELONA

EDITORIAL TEIDE, S. A. * BARCELONA

Quinta edición, 1968

N.° de Registro, B. 410-1961

Dep. Legal B. **33.896-1968**

© 1964 EDITORIAL TEIDE, S. A. - Bori y Fontestá, 18 - Barcelona-6
A. G. PONSA - Gonzálo Pons, 21-23 - HOSPITALET (Barcelona)

ADVERTENCIA PRELIMINAR

Con este libro, rigurosamente adaptado al Cuestionario oficial, se pretende que el lector adquiera de manera clara, precisa y rigurosa los conceptos físicos básicos y sus aplicaciones.

A este propósito, se han intercalado ejemplos y problemas resueltos que aclaran y reafirman el concepto físico y las distintas leyes y métodos seguidos para la medida o comprobación de los múltiples fenómenos estudiados. En cada capítulo se indica la realización de las prácticas *propuestas en el Cuestionario Oficial, con el fundamento teórico de las mismas y la parte experimental, incluyendo en muchos casos un ejemplo numérico de una práctica realizada.*

Al final de cada capítulo proponemos cierto número de cuestiones *y* problemas. *Las cuestiones son como una continuación de lo estudiado en teoría y de la aplicación de lo expuesto a casos prácticos, o son también relativas a las manipulaciones experimentales. La contestación a las cuestiones ayudará a asimilar y comprender lo expuesto en la teoría. Algunas, son casos prácticos que el lector puede por sí mismo realizar tal como se han enunciado, procurando dar la interpretación correcta.*

Finalmente, un variado número de problemas a resolver *contribuye eficazmente a evitar que el estudio de la Física sea meramente una cuestión memorística, dando, al mismo tiempo, una agilidad en la interpretación, planteo y resolución del problema al aplicar correctamente las leyes adecuadas y expresar las magnitudes con las correspondientes unidades.*

El autor desea y espera que este libro, por su valor formativo, sea de gran utilidad para los estudiantes a los cuales va destinado, de forma que cuando lleguen a la Universidad hayan asimilado la parte básica de la Física.

M. P. C.

PRIMERA PARTE

MECANICA

CAPÍTULO I

NOCIONES DE CALCULO VECTORIAL

Magnitudes escalares y vectoriales. — Se llama magnitud escalar a la que queda perfectamente determinada por un solo número: el valor de su medida. Como ejemplos de magnitudes escalares tenemos un *volumen,* una *masa,* un *tiempo* o una *temperatura.*

Una magnitud es *vectorial* cuando para determinarla se requiere, además de su cuantía, su dirección y sentido. Una fuerza o una velocidad son magnitudes vectoriales, ya que para determinarlas debemos conocer magnitud, dirección y sentido; así, cuando decimos que un cohete asciende verticalmente con velocidad de 20 m/s, definimos su velocidad, de cuantía 20 m/s, dirección vertical y sentido ascendente. Para representar tales magnitudes se utilizan los *vectores.*

Vector. — Es un segmento orientado. El módulo del vector es la longitud del segmento. La dirección nos viene indicada por su orientación. El sentido va de origen a extremo y se representa con una punta de flecha en el extremo.

FIG. 1

Para representar una magnitud vectorial dibujamos un vector de módulo el valor de aquélla, a una escala adecuada, con la misma dirección y sentido. Para indicar que una magnitud es vectorial, colocamos una flecha encima de su símbolo indicador; para expresar el vector velocidad escribimos $\vec{v}$. Si no colocamos la flecha, nos referimos al módulo.

En la figura 1 representamos el vector $\vec{OA}$ de módulo la longitud OA, dirección la de la recta r o recta soporte, y sentido de O a A.

Podemos clasificar los vectores en *fijos, deslizantes* y *libres*. Un vector es *fijo* cuando su origen es un punto fijo, llamado punto de aplicación. Es *deslizante* cuando el punto de aplicación puede ser cualquiera de la recta soporte (o línea de acción del vector). Es *libre* cuando el punto de aplicación puede ser cualquiera. Es decir, un vector libre lo podemos trasladar paralelamente a sí mismo para poder aplicarlo a cualquier punto. Si no indicamos lo contrario, operaremos con *vectores libres*.

Componentes de un vector. — Supongamos un vector en un plano. Podemos referirlo a un sistema de ejes coordenados cartesianos. Se llaman *componentes del vector* respecto a dichos ejes a las proyecciones del vector sobre ellos. En el plano el vector tiene dos componentes; en el espacio tendría tres. En la fig. 2 *a* representamos el vector $\vec{V}$ de componentes V_x, V_y. Dado el módulo V del vector y su dirección por el ángulo φ que forma con el eje OX, determinaremos sus componentes expresando el valor de las proyecciones sobre OX y OY por la conocida fórmula: $V_x = V \cos \varphi$,

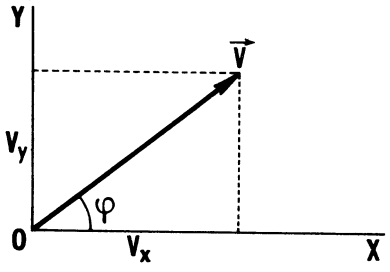


FIG. 2 *a*

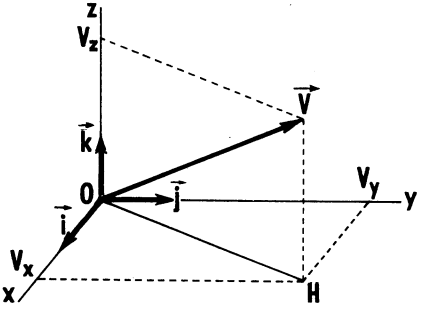


FIG. 2 *b*

$V_y = V$ sen φ. Si queremos hallar el módulo y la dirección dadas las componentes, aplicaremos el teorema de Pitágoras

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

y la relación trigonométrica $\text{tg } \varphi = \dfrac{V_y}{V_x}$.

Supongamos el vector $\vec{V}$ en el espacio, referido a un sistema de tres ejes coordenados ortogonales. Las componentes son las proyecciones del vector sobre los ejes; éstas son V_x sobre Ox, V_y sobre Oy, V_z sobre Oz (fig. 2 b).

Conociendo el módulo V y la dirección del vector, hallaremos las componentes:

$$V_x = V \cos (V, Ox) = \alpha V$$
$$V_y = V \cos (V, Oy) = \beta V$$
$$V_z = V \cos (V, Oz) = \gamma V$$

llamando a los cosenos de los ángulos que forma $\vec{V}$ con Ox, Oy, Oz (cosenos directores) α, β, γ respectivamente.

Conociendo V_x, V_y, V_z podemos hallar el módulo por aplicación del teorema de Pitágoras:

$$V_x^2 + V_y^2 = OH^2; \quad OH^2 + V_z^2 = V^2; \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

y la dirección determinando los cosenos directores

$$\alpha = \frac{V_x}{V}, \quad \beta = \frac{V_y}{V}, \quad \gamma = \frac{V_z}{V}$$

Suma de vectores. — Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ aplicados en O (fig. 3), hallaremos su suma o resultante trazando la diagonal del paralelogramo construido tomando los dos vectores como lados contiguos. Referidos los dos vectores a un sistema de ejes (fig. 3), vemos que las componentes del vector resultante son iguales respectivamente a la suma de las componentes de los vectores sumandos. Esta propiedad puede tomarse como definición de suma y generalizar a un sistema de n vectores; la suma o resultante será un vector de componentes iguales a la suma de las respectivas componentes de los sumandos. Para determinar gráficamente la suma de n vectores se utiliza la regla del polígono. Consiste en dibujar los vec-

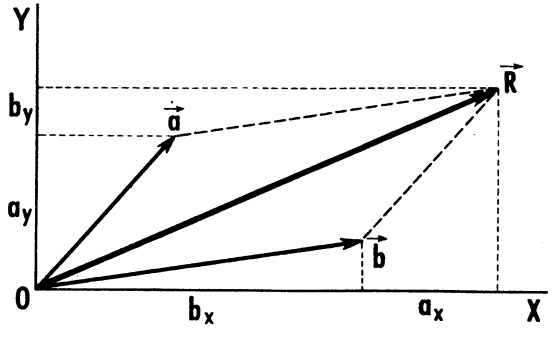


FIG. 3

tores uno a continuación de otro; es decir, que el origen de uno coincida con el extremo del anterior; la resultante es el vector de origen el del

primero y extremo el del último. Este método no es más que la aplicación de la regla del paralelogramo a las sumas parciales de los dos primeros, su resultante con el siguiente, y así sucesivamente.

Diferencia de vectores. — Un vector es *opuesto* a otro cuando tiene el mismo módulo y dirección, pero sentido contrario.

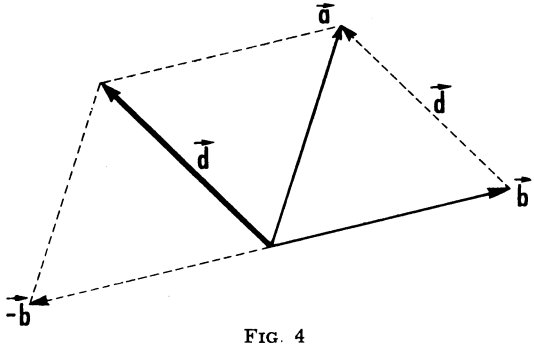


FIG. 4

Podemos definir la diferencia de dos vectores como la suma vectorial del minuendo y el vector opuesto al sustraendo. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (fig. 4); su diferencia $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ la obtendremos sumando al $\vec{a}$ el opuesto al $\vec{b}$. De la figura 4 deducimos la siguiente regla práctica: la diferencia de dos vectores la obtenemos uniendo sus extremos, tomando el sentido sustraendo minuendo.

Producto de un escalar por un vector. — Este producto es un vector de módulo el producto del escalar por el módulo del vector, de la misma dirección y sentido igual o contrario, según que el escalar sea positivo o negativo.

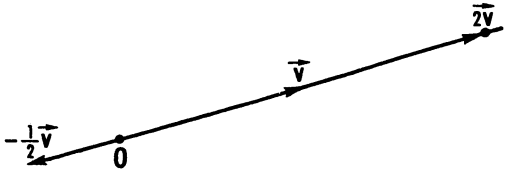


FIG. 5

En la figura 5 representamos el producto del vector $\vec{v}$ por los escalares 2 y $-\frac{1}{2}$.

Expresión del vector $\vec{V}$ en función de los componentes y los vectores unitarios sobre los ejes. — Sean $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tres vectores de módulo unidad dirigidos respectivamente según los ejes x, y, z y en el sentido tomado como positivo en los mismos (fig. 2 *b*). El producto del escalar V_x por el vector $\vec{i}$ nos da un vector de módulo V_x dirección y sentido el de $\vec{i}$; análogamente $V_y\vec{i}$, $V_z\vec{k}$ nos dan vectores de módulo las componentes según Oy y según Oz y de dirección y sentido los de $\vec{j}$ y $\vec{k}$ respectivamente. Sumando los vectores así obtenidos encontramos:

$$V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} = \vec{V}$$

Esta es la expresión de un vector en función de sus componentes.

Producto escalar de dos vectores. — El producto escalar de dos vectores es, por definición, un escalar igual al producto de los módulos de los

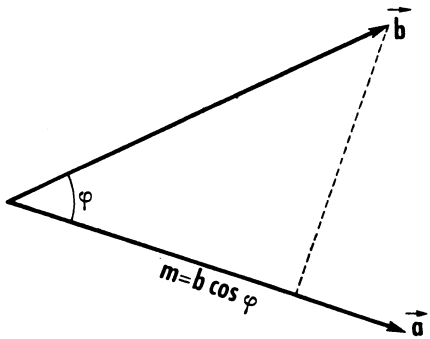


FIG. 6

vectores por el coseno del ángulo que forman. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores dados (fig. 6); indicaremos su producto escalar con la notación:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

Dicho producto puede también expresarse como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él; $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot m$, siendo $m = b \cos \varphi =$ proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

De la definición se deduce que si los vectores son perpendiculares, su producto escalar es nulo. El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo.

Este producto goza de la propiedad conmutativa, es decir: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, y de la distributiva, o sea $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ que se deduce de la expresión del producto escalar como producto de $\vec{c}$ por la proyección de $(\vec{a} + \vec{b})$ sobre $\vec{c}$.

Para determinar la expresión analítica del producto escalar de dos vectores $\vec{a} \cdot \vec{b}$ expresaremos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en función de sus componentes y los multiplicaremos escalarmente, teniendo presente la propiedad distributiva, hallando:

$$(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ya que $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

Producto vectorial de dos vectores. — Es un vector que tiene por módulo el producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman; por dirección, la perpendicular al plano determinado por los dos vectores, y por sentido, el de avance de un sacacorchos al girar del primero al segundo según el menor ángulo.

Para indicar que $\vec{p}$ es el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (fig. 7 *a*) utilizamos la notación: $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, siendo $p = a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \varphi$.

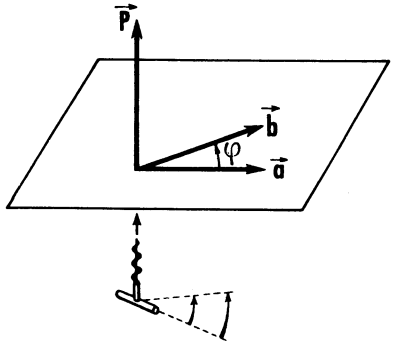


FIG. 7 *a*

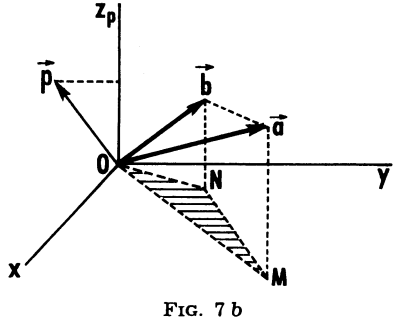


FIG. 7 *b*

De la definición se deduce que si invertimos el orden de los factores se

invierte el sentido del vector producto vectorial, o sea $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$.

Este producto posee la propiedad distributiva

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$$

Es nulo si los dos vectores son paralelos ($\varphi = 0$, y, por tanto, sen $\varphi = 0$), y es máximo si son perpendiculares (sen $\varphi = 1$).

Vamos a hallar la expresión analítica del producto vectorial de dos vectores. Sean éstos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (fig. 7 *b*) y su producto vectorial $\vec{p}$. La componente de $\vec{p}$ según Oz es $p_z = p \cos(p, Oz)$; pero $p =$ doble del área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, por lo tanto $p_z =$ doble del área de la proyección del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sobre el plano xOy o sea $p_z =$ doble del área del triángulo OMN. Según la Geometría Analítica el área del citado triángulo vale

$$1/2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \end{vmatrix}$$

luego $p_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$

análogamente $p_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}$, $p_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}$

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

el desarrollo del determinante nos da la expresión analítica del producto vectorial de $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Producto mixto. — Es el producto escalar de un vector por el vectorial de otros dos:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

sustituyendo las componentes del producto vectorial por su valor vemos que este producto mixto es igual al desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Si dos de los vectores son iguales o proporcionales, el producto mixto es nulo, ya que el determinante tendría dos filas iguales o proporcionales. Fácilmente se demuestra que su significado geométrico es el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

Doble producto vectorial. — Se llama así al producto vectorial de un vector por el producto vectorial de otros dos vectores. Su expresión es

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

es un vector contenido en el plano determinado por $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

La relación anterior se comprueba expresando los productos vectoriales analíticamente y operando.

Momento de un vector respecto a un punto. — Se define el momento de un vector de origen P respecto al punto O, como el producto vectorial

$$\vec{M} = \vec{OP} \wedge \vec{V}$$

el módulo es igual a $V \cdot d$, la dirección perpendicular al plano determinado por $\vec{V}$ y el punto O y el sentido dado por la regla del sacacorchos (como en el producto vectorial).

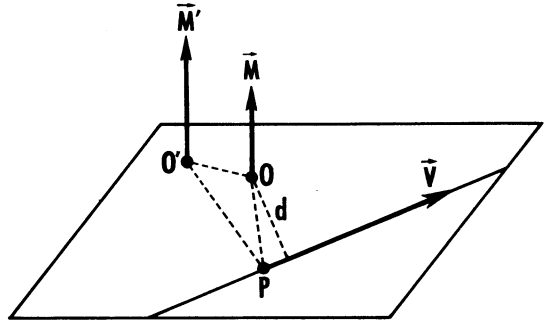


FIG. 8 *a*

Si aplicamos el vector en otro punto de la recta por él determinada y hallamos el momento respecto a O obtendremos el mismo valor, dado que el módulo será $V \cdot d$ y tendrá la misma dirección y sentido. Por tanto la definición se aplica tanto a los vectores fijos como a los deslizantes. En los vectores libres no podemos definir el momento.

Conociendo el momento M con respecto a O lo queremos hallar respecto a O'

$$\vec{M'} = \vec{O'P} \wedge \vec{V} \quad \text{pero} \quad \vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$$

$$\vec{M'} = (\vec{O'O} + \vec{OP}) \wedge \vec{V} = \vec{O'O} \wedge \vec{V} + \vec{OP} \wedge \vec{V} = \vec{O'O} \wedge \vec{V} + \vec{M}$$

Si $\vec{O'O}$ es paralelo a $\vec{V}$, $\vec{M'}$ y $\vec{M}$ coinciden.

El momento es un vector libre función del punto respecto al cual lo tomamos, por esto generalmente se considera aplicado al punto.

Momento de un vector fijo o deslizante respecto a un eje. — El momento de un vector fijo o deslizante respecto a un eje se define como la proyección sobre el eje del momento del vector respecto a un punto cualquiera del eje.

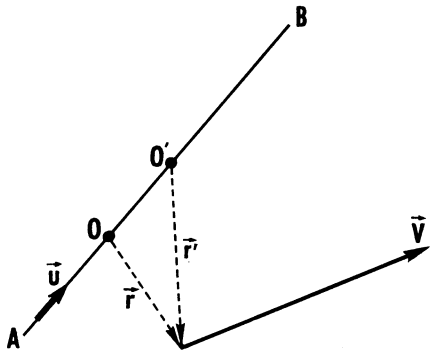


FIG. 8 b

Vamos a demostrar que este momento es independiente del punto elegido sobre el eje. Sea el eje AB (fig. 8 b), el momento respecto al punto O del eje vale

$$\vec{M_O} = \vec{r} \wedge \vec{V}$$

Siendo $\vec{u}$ un vector unitario sobre el eje, la proyección de $\vec{M_O}$ sobre el eje vale $\vec{M_e} = \vec{M_O} \cdot \vec{u}$.

Si tomamos momento respecto a otro punto del eje O' hallamos

$$\vec{M_{O'}} = \vec{r'} \wedge \vec{V} \quad \text{pero} \quad \vec{r} = \vec{O'O} + \vec{r}$$

$$\vec{M_{O'}} = \vec{O'O} \wedge \vec{V} + \vec{r} \wedge \vec{V} = \vec{O'O} \wedge \vec{V} + \vec{M_O}$$

$$M'_e = \vec{M_O} \cdot \vec{u} = (\vec{OO'} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} + \vec{M_O} \cdot \vec{u} = (\vec{OO'} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} + M_e$$

como $\vec{O'O}$ y $\vec{u}$ tienen la misma dirección $(\vec{O'O} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} = 0$, luego $M'_e = M_e$.

Este momento será nulo si el vector es paralelo al eje o si la dirección del vector corta al eje.

Derivada de un vector respecto de un escalar. — Supongamos un punto con velocidad variable. En cada instante el vector velocidad tiene un valor distinto; es decir, tenemos un vector que depende de un escalar (el tiempo). En general, diremos que un vector es función de un escalar cuando para cada valor del escalar tenemos definido un cierto vector. Si esto ocurre, las componentes del vector son función del escalar. Consideremos dos valores t_1 y t_2 del escalar variable, para los cuales los valores del vector son $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$; llamando $\Delta\vec{V}$ a la diferencia $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$, la derivada del vector $\vec{V}$ o vector derivado de $\vec{V}$ es el límite del cociente $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ cuando Δt tiende a cero, y escribiremos

$$\vec{V}' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Como las componentes de $\Delta\vec{V}$ son ΔV_x y ΔV_y, que son función de t, las componentes de $\vec{V}'$ serán:

$$V_x' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{dV_x}{dt}; \qquad V_y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta t} = \frac{dV_y}{dt}$$

es decir, que las componentes de la derivada de un vector respecto a un escalar son las derivadas de las componentes del vector respecto a este escalar.

Si consideramos el vector en el espacio, tiene tres componentes: V_x, V_y, V_z, y las componentes de su derivada son:

$$\frac{dV_x}{dt}; \quad \frac{dV_y}{dt}; \quad \frac{dV_z}{dt}$$

CUESTIONES

1. *Citar ejemplos de magnitudes escalares y vectoriales.*

2. *Representar gráficamente la velocidad del viento que sopla del NE con velocidad de 10 m/seg.*

3. *Dado el triángulo* ABC *determinar:* $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$ *y* $\vec{AB} - \vec{AC}$.

4. *Dos vectores del mismo módulo forman un ángulo φ. Comprobar que el módulo de su suma vale* $R = 2V \cos \frac{\varphi}{2}$ *y está dirigida según la bisectriz del ángulo. Aplicar este resultado a la suma de dos vectores opuestos.*

5. *Comprobar que el módulo del producto vectorial es igual al doble del área del triángulo formado por los dos vectores y el vector suma o el vector diferencial.*

6. *Derivada de un vector constante.*

PROBLEMAS

1. Un vector de módulo 36 forma un ángulo de 30° con el eje OX. Determinar sus componentes.

2. Dos vectores perpendiculares tienen los módulos iguales a 80. Determinar su suma y su diferencia.

3. Dado un triángulo ABC comprobar que la resultante de $\vec{BA}+\vec{BC}$ corta a AC en su punto medio.

4. Dado un hexágono regular $ABCDEF$ de lado 1 metro. Determinar las sumas

$$\vec{AB}+\vec{BC};\ \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD};\ \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE};$$

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE}+\vec{EF} \text{ y } \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE}+\vec{EF}+\vec{FA}.$$

(5) Dos vectores $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ de módulos 50 y 60 forman un ángulo de 60°. El primero $\vec{OA}$ tiene la dirección OX en el sentido positivo y el extremo de $\vec{OB}$ esta en el cuarto cuadrante. Determinar su suma, diferencia, producto escalar y vectorial.

(6) Las componentes de un vector $\vec{V}$ son $V_x=6$ sen t, $V_y=6$ cos t. Hallar el módulo de la derivada de dicho vector respecto t.

CAPíTULO II

CINEMÁTICA

Generalidades. — La Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento, prescindiendo de las causas que lo producen.

Consideremos un punto móvil; su movimiento queda definido al determinar la posición en función del tiempo. Para determinar la posición de dicho punto podemos tomar un vector de origen fijo y cuyo extremo coincida con el punto; este vector, que será función del tiempo, es el *vector de posición*. A la línea recorrida por el punto en su desplazamiento se le llama *trayectoria*, que será el camino seguido por el extremo del vector de posición.

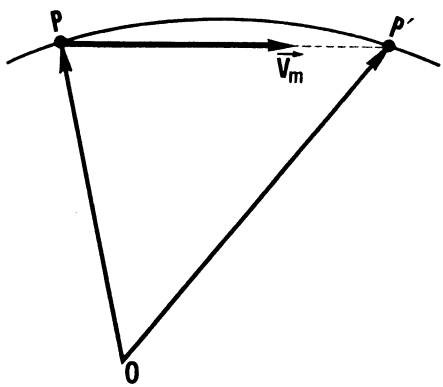


FIG. 9 *a*

Velocidad media. — Supongamos que el punto móvil ocupa la posición P en el instante t (fig. 9 *a*) y la P' en el instante t'. Tomemos el punto O de referencia. El vector de posición del punto en el instante t es el $\vec{OP}$, y en el t' el $\vec{OP'}$; designamos por *vector desplazamiento* al $\vec{PP'}$ diferencia

de los vectores de posición $\vec{OP'} - \vec{OP} = \vec{PP'}$. Definiremos la velocidad media del móvil entre los instantes t y t' (o entre el punto P y P') al cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo $t' - t$, o sea: $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{PP'}}{t' - t}$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{PP'}$.

Velocidad instantánea. — Si tomamos intervalos de tiempo cada vez menores, el punto P', en su nueva posición, estará más próximo al P, y si el intervalo de tiempo tiende a cero, la velocidad media tiende a la instantánea en P. Definiremos la *velocidad instantánea* en un punto al límite de la velocidad media entre el punto considerado y otro inmediato al tender a cero el intervalo de tiempo, o sea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{PP'}}{\Delta t}, \quad \text{pero} \quad \vec{PP'} = \vec{OP'} - \vec{OP} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

llamando $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ a los vectores de posición de los puntos P y P'; así pues

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{dr}}{dt}$$

la velocidad instantánea es la derivada del vector de posición respecto al tiempo en el instante considerado. La dirección del vector desplazamiento (fig. 9 b) es una secante que tiende a la tangente en P cuando P' tiende a P.

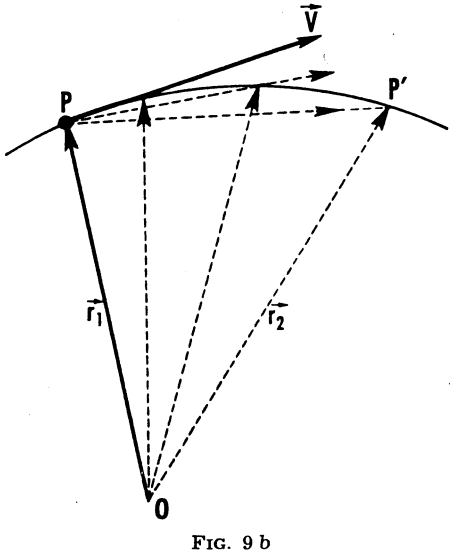


FIG. 9 b

y lo mismo la del vector velocidad media; luego la velocidad instantánea tiene dirección tangente a la trayectoria en el punto considerado. Cuando P' tiende a P, PP' tiende al arco de trayectoria Δs, luego el módulo de la velocidad instantánea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

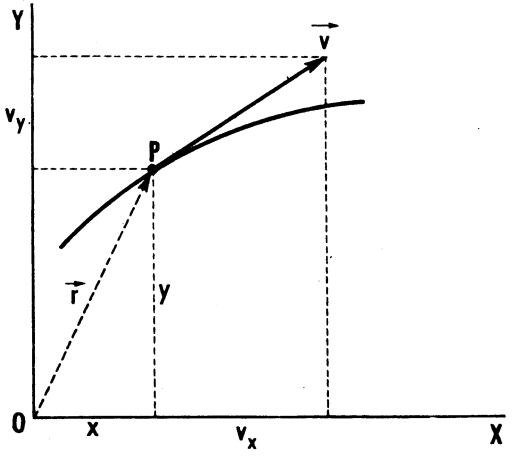


FIG. 10

Las componentes del vector velocidad, según un sistema de ejes coordenados de origen O (fig. 10), serán:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt}; \qquad v_y = \frac{dr_y}{dt}$$

pero $\qquad r_x = x, \qquad r_y = y$

luego: $\qquad v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$

Aceleración. — Se llama *aceleración media* entre dos posiciones del móvil al cociente entre la diferencia de los vectores velocidad correspondientes a las dos posiciones y el intervalo de tiempo transcurrido entre las mismas. Sea $\vec{v}_1$ la velocidad en el punto P, y $\vec{v}_2$ en el punto P' (fig. 11). La aceleración media entre P y P' vale

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea en un punto es el límite a que tiende la aceleración media entre el punto considerado y otro inmediato, al tender a cero el intervalo de tiempo transcurrido entre dichas posiciones. Es decir,

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{dv}}{dt}$$

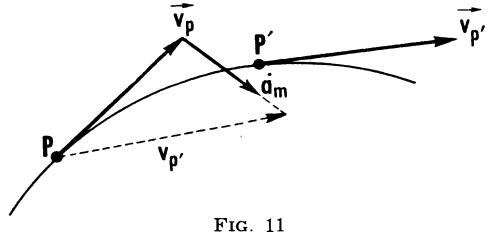


FIG. 11

o sea la derivada del vector velocidad respecto al tiempo. Sus componentes cartesianas serán:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Si el vector aceleración lo proyectamos según dos ejes de origen el punto considerado, y dirigidos según la tangente y la normal a la trayectoria (fig. 12), tenemos las componentes *tangencial* y *normal*, que valen:

$$a_t = \frac{dv}{dt}; \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

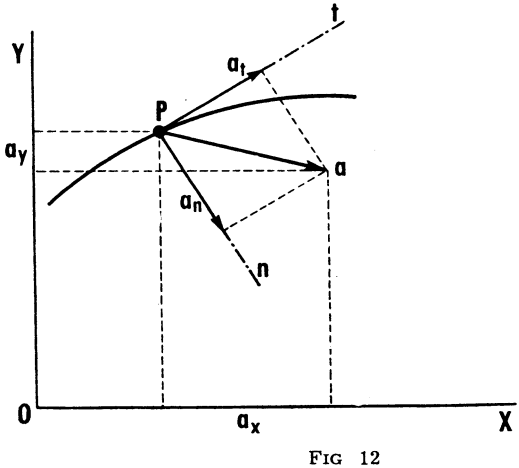


FIG 12

siendo R el radio de curvatura de la trayectoria en el punto, y v el módulo de la velocidad.

Según las expresiones de dichas componentes, deducimos que la aceleración tiene componente tangencial si varía el módulo de la velocidad; si el módulo de la velocidad es constante, la componente tangencial es nula. Si varía la dirección de la velocidad (trayectoria curvilínea), tenemos componente normal; si la trayectoria es rectilínea (radio de curvatura infinito), la componente normal de la aceleración es nula.

Así pues, la componente tangencial de la aceleración nos da cuenta de las variaciones del módulo de la velocidad, y la componente normal de los cambios de dirección.

Unidades de velocidad y aceleración. — La velocidad es un cociente entre un espacio y un tiempo; en el sistema C. G. S. se mide en cm/s, y en el Giorgi y terrestre en m/s.

A veces en la práctica se mide la velocidad en km/hora, que equivale a 1000 m/3600 s $= \frac{1}{3{,}6}$ m/s.

La aceleración se mide en unidades de velocidad/tiempo, luego en el sistema C. G. S. será cm/s^2, y en el Giorgi y terrestre en m/s^2.

Cinemática del movimiento uniforme. — Si un punto se mueve con velocidad constante en una dirección, describe una trayectoria rectilínea que coincide con la dirección del vector velocidad. Si además de la dirección son constantes el módulo y el sentido, el movimiento es *rectilíneo uniforme*. En este caso la velocidad media entre dos puntos coincide con la instantánea en cualquier punto de la trayectoria. Siendo la dirección y sentido constantes, podemos operar con módulos. Sean P_1 y P_2 dos puntos de la recta ocupados por el móvil en los instantes t_1 y t_2. El vector desplazamiento tiene por módulo la distancia $s = s_2 - s_1$ entre los dos puntos. El intervalo de tiempo es $t = t_2 - t_1$, luego la velocidad media = a la instantánea $= v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s}{t}$; $v = \frac{s}{t}$, es decir, la velocidad es igual al cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo. Despejando s en la fórmula anterior $s = v \cdot t$ lo cual nos indica que el espacio recorrido es proporcional al tiempo empleado, siendo v la constante de proporcionalidad. Podemos representar gráficamente este tipo de movimiento, tomando como abscisas los tiempos y ordenadas los espacios. La representación gráfica es una recta de ecuación $s = v \cdot t$ (fig. 13). Si en el instante inicial el espacio recorrido era s_0, la ecuación es $s = s_0 + vt$. Si tomamos como ordenadas las velocidades, la representación gráfica es una recta paralela al eje de los tiempos.

Movimiento rectilíneo uniformemente variado. — Supongamos el vector velocidad constante en dirección y sentido, pero de módulo variable. El movimiento será rectilíneo. Debido a la variación del módulo existirá

una componente tangencial de la aceleración $a_t = \frac{dv}{dt}$, pero no componente normal (por ser la trayectoria rectilínea). El vector aceleración coincide con su componente tangencial. Su dirección es la de trayectoria y, por tanto, coincide con la de la velocidad y el sentido el de la variación de la velocidad (si v aumenta, coincide con el de $\vec{v}$; si disminuye, tiene sentido contrario, o bien, la aceleración es positiva o negativa según lo sea Δv). Si la aceleración es positiva, el movimiento es *acelerado*, y si es negativa *(deceleración)*, es *retardado*.

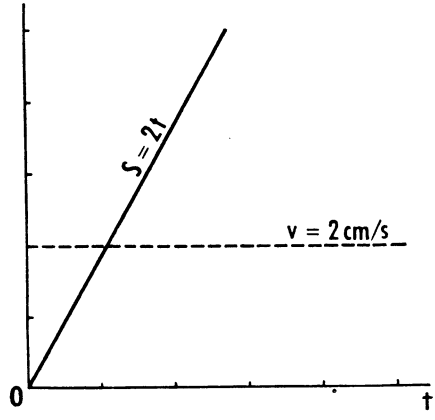


FIG. 13

Consideremos el caso más sencillo de aceleración constante: el movimiento es entonces uniformemente variado. Si $a > 0$ será acelerado. Por ser la aceleración constante, serán iguales la aceleración media entre dos puntos y la instantánea en cualquier punto de la trayectoria. Escribiremos, pues,

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

siendo v_1 la velocidad en el instante t_1, y v_2 en el t_2. Llamando $t = t_2 - t_1$ al intervalo de tiempo y despejando la diferencia de velocidades, tenemos: $v_2 - v_1 = a \cdot t$. Si suponemos que en el instante t_1 el móvil estaba en reposo (punto de partida), $v = a \cdot t$. Es decir, si un punto parte del reposo y le comunicamos una aceleración a, al cabo de un tiempo t posee una velocidad proporcional al tiempo, siendo a la constante de proporcionalidad.

Para determinar el espacio recorrido por el móvil en un cierto tiempo, partiendo del reposo y con aceleración constante a, hallaremos la veloci-

dad media en este intervalo de tiempo, la cual, por ser proporcional al tiempo, será igual a la media aritmética de los valores extremos

$$v = \tfrac{1}{2}\,(0 + a \cdot t) = \tfrac{1}{2}\,a \cdot t,$$

y el espacio

$$s = v_m \cdot t = \tfrac{1}{2}\,a \cdot t^2,$$

o sea, el espacio es proporcional al cuadrado del tiempo. La representación gráfica es una parábola de eje vertical y vértice en el origen. Consideremos el caso en que la velocidad inicial vale v_0; entonces, al cabo de un tiempo t la velocidad vale $v = v_0 + a \cdot t$, y la velocidad media es

$$v_m = \tfrac{1}{2}\,(v_0 + v_0 + a \cdot t) = v_0 + \tfrac{1}{2}\,at$$

y el espacio

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}\,at^2$$

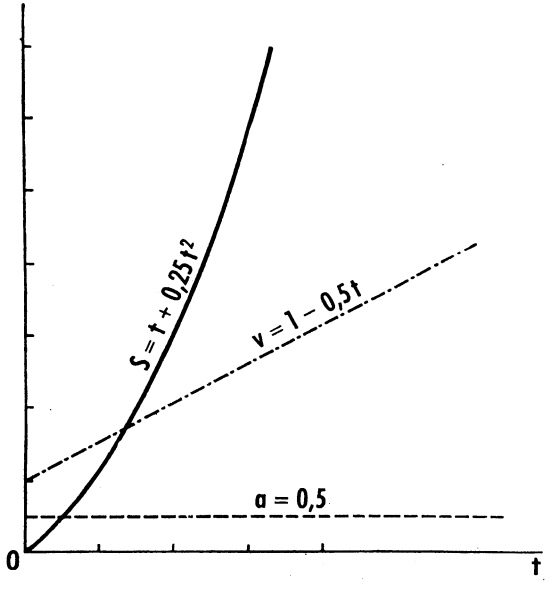


FIG. 14

La representación gráfica es, en este caso, una parábola de eje paralelo al *OY* (fig. 14). Si el movimiento es retardado, la aceleración es negativa (deceleración) y las fórmulas se escriben así:

$$v = v_0 - a \cdot t, \qquad s = v_0 t - \tfrac{1}{2}\,a \cdot t.$$

Resumen:

movimiento acelerado $\begin{cases} \mathbf{v = v_0 + at.} \\ \mathbf{s = v_0 t + \tfrac{1}{2}\,at^2.} \end{cases}$

movimiento retardado $\begin{cases} \mathbf{v = v_0 - at.} \\ \mathbf{s = v_0 t - \tfrac{1}{2}\,at^2.} \end{cases}$

Ejemplo: Un punto con movimiento rectilíneo uniforme va a 72 km/h. Es decelerado (frenado) uniformemente, de tal forma que al cabo de 5 segundos su velocidad es de 10 m/s . Calcular el valor de la deceleración y el espacio recorrido en este intervalo de tiempo.

$$v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}; \quad v = v_0 - at; \quad 10 = 20 - a \cdot 5; \quad a = 2 \text{ m/s}$$

$$s = v \cdot t - \tfrac{1}{2} a \cdot t^2; \quad s = 20 \cdot 5 - \tfrac{1}{2} 2 \cdot 5^2 = 100 - 25 = 75 \text{ m}.$$

Resultado $\quad a = 2 \text{m/s}^2$, $\quad s = 75$ m.

Movimiento circular. — Es el de un punto cuya trayectoria es una circunferencia. Consideremos el vector de posición $\vec{R}$ aplicado en el centro de la circunferencia, al desplazarse el punto P, este vector $\vec{R}$ gira y al cabo de un tiempo t ha descrito cierto ángulo (fig. 15). Sea este ángulo φ_1 en el instante t_1 y φ_2 en el instante t_2, llamaremos *velocidad angular media*

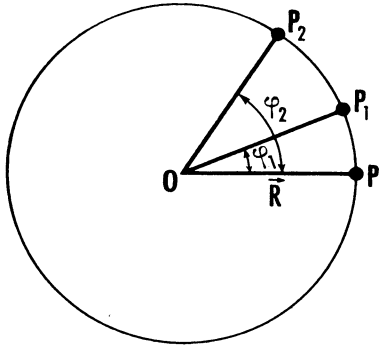


FIG. 15

entre estas dos posiciones, al cociente entre el ángulo descrito por el vector de posición y el intervalo de tiempo, es decir,

$$\omega_m = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t};$$

la *velocidad angular instantánea* es

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

La aceleración angular media entre dos posiciones es el cociente entre la diferencia de velocidades angulares en los dos puntos y el intervalo de tiempo

$$= \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

y la instantánea es el

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

La velocidad del punto es un vector tangente a la circunferencia y cuyo módulo vale $v = \dfrac{ds}{dt}$ siendo s el arco recorrido.

Pero

$$\text{arco} = \text{ángulo} \times \text{radio}: \quad ds = R \cdot d\varphi,$$

luego

$$v = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$$

A v se le llama *velocidad lineal* y es igual en cada punto a la angular por el radio (fig. 16).

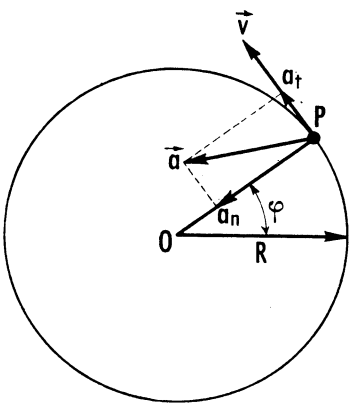


FIG. 16

La componente tangencial de la aceleración es

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha\,;$$

es decir, la aceleración tangencial es igual a la angular por el radio. La componente normal de la aceleración vale

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

El módulo del vector aceleración vale:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Supongamos la aceleración angular α constante. La aceleración tangencial también lo será $a_t = R \cdot \alpha$. La aceleración angular media y la instantánea coinciden y podemos escribir:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

de donde

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Para determinar el ángulo descrito en un intervalo de tiempo t hallaremos la velocidad angular media en dicho intervalo, que será

$$\omega_m = \frac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha t}{2},$$

luego, el ángulo

$$\varphi = \omega_m t = (\omega_0 + \tfrac{1}{2}\alpha t) \cdot t = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

La componente normal de la aceleración vale

$$\omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R.$$

La velocidad angular se mide en radianes/s, y la aceleración en radianes/s^2.

Movimiento circular uniforme. — Si el punto móvil recorre la circunferencia con velocidad constante la velocidad angular $\omega = \frac{v}{R}$ también lo será y la aceleración angular como la tangencial serán nulas. Por ser la velocidad angular constante, la velocidad angular media y la instantánea son iguales en cualquier intervalo. Podremos definir la velocidad angular como el cociente entre el ángulo descrito y el intervalo de tiempo; si contamos el tiempo desde el instante de iniciarse el movimiento $\omega = \frac{\varphi}{t}$.

Supongamos que el tiempo empleado (al cual se le llama período) en dar una vuelta vale T; la velocidad angular vale el ángulo descrito (igual a 2π), dividido por el tiempo (igual a T): $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Llamaremos frecuencia N al número de vueltas por segundo que vale $N = \frac{1}{T}$. La velocidad angular vale $\omega = 2\pi N$.

Así pues, en el movimiento circular uniforme debemos considerar:

$$\text{velocidad angular} = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N,$$

$$\text{velocidad lineal } v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R \cdot N,$$

$$\text{componente normal de la aceleración} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 4\pi^2 N^2 R.$$

La componente normal de la aceleración coincide con la aceleración en este caso (por ser la componente tangencial nula), y es constante por serlo v.

Resumen:

$$a = \text{constante}$$

$$a = 0 \begin{cases} \omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi N \\ a_t = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R = \dfrac{4\pi^2}{T^2} R = 4\pi^2 N^2 R \end{cases} \qquad a > 0 \begin{cases} \omega = \omega_0 + at \\ \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ a_t = aR \\ a_n = \omega^2 R = (\omega_0 + at)^2 R \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} \omega = \omega_0 - at \\ \varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ a_t = aR \\ a_n = (\omega_0 - at)^2 R \end{cases}$$

Ejemplos: Dos ruedas concéntricas de radios R_1 y R_2 giran con la misma velocidad angular ω. La velocidad lineal de un punto de la periferia de la primera vale $v_1 = \omega R_1$ y de la segunda $v_2 = \omega R_2$ $\quad \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$.

Las velocidades lineales de los puntos de la periferia de las ruedas son proporcionales a los radios respectivos.

Si las ruedas están enlazadas por una correa, las velocidades lineales de los puntos de la periferia son iguales

$$v_1 = v_2 \qquad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{2\pi N_1}{2\pi N_2} = \frac{R_2}{R_1}; \qquad \frac{N_1}{N_2} = \frac{R_2}{R_1}$$
$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

Las velocidades angulares de las ruedas, están en razón inversa de sus radios y lo mismo el número de vueltas por segundo de cada rueda.

Problema: Un punto describe una circunferencia de radio 4 m con velocidad constante de 10 m/seg. Le aplicamos una aceleración angular constante hasta que dé una vuelta, cesando en aquel instante. Sabiendo que en dar esta vuelta ha tardado la mitad que tardaba antes de aplicarle la aceleración, determinar la aceleración angular y la velocidad angular después de haber cesado la aceleración.

Velocidad angular inicial $\omega_0 = \dfrac{v}{R} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$ rad/s;

Tiempo empleado en dar una vuelta $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{2{,}5} = 0{,}8\pi$ s;

Tiempo empleado en dar la vuelta al actuar la aceleración $\frac{1}{2}\, 0{,}8\pi = 0{,}4\pi$ s;

Angulo descrito $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\, \alpha t^2$; $\quad 2\pi = 2{,}5 \cdot 0{,}4\pi + \frac{1}{2}\, \alpha\, (0{,}4\pi)^2$; $\quad \alpha = \dfrac{12{,}5}{\pi}$ rad/s²;

Velocidad angular final $\omega = \omega_0 + \alpha t = 2{,}5 + \frac{12{,}5}{\pi} \cdot 0{,}4\pi = 7{,}5$ rad/seg.

Resultado $\alpha = \frac{12{,}5}{\pi}$ rad/s^2

$\omega = 7{,}5$ rad/s

Movimiento armónico simple. — Un movimiento es periódico cuando el móvil ocupa la misma posición, con idéntica velocidad y aceleración a intervalos de tiempo constantes. Al intervalo de tiempo se le llama *período.* Como ejemplos, tenemos el movimiento circular, el pendular, el del pistón de un motor, etc. Un caso de movimiento periódico muy importante en la Física es el *movimiento armónico simple,* el cual puede considerarse como la proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro.

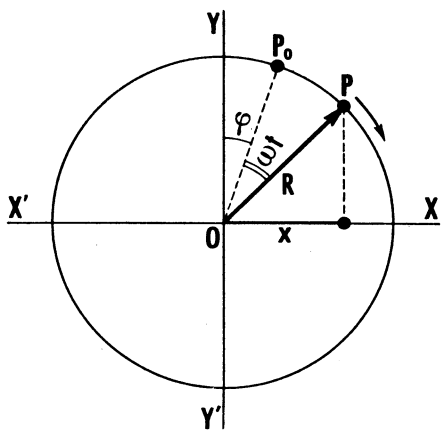


FIG. 17

Ecuación del movimiento armónico simple. — Sea la circunferencia de centro O y radio R (fig. 17) recorrida por el punto P, con velocidad angular constante, en el sentido de las agujas de un reloj. Tomaremos como eje de proyección el diámetro $X'X$, y como origen de ángulos el diámetro $Y'Y$, perpendicular al anterior. Supongamos que la posición de P al iniciarse el movimiento es la P_0. El radio correspondiente forma con la dirección $Y'Y$ un ángulo φ, que se llama *fase inicial.* Al cabo de un tiempo t, el punto está en P, siendo el ángulo $\widehat{P_0OP} = \omega t$. La proyección de P sobre $X'X$ vale $x = R \cos \widehat{POX}$; $x = R$ sen $(\omega t + \varphi)$. Ésta es la ecuación del movimiento armónico simple. A x se le llama *elongación;* a la velocidad angular ω, *pulsación;* al ángulo $\omega t + \varphi$, *fase;* a φ, *fase inicial.* El período del movimiento armónico simple es el mismo que el del movimiento circu-

lar, T, ya que al cabo de un tiempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ el punto P ha dado una vuelta completa y ocupa la misma posición; luego su proyección x también ocupará la misma posición. Más adelante veremos que la velocidad y la aceleración tienen el mismo período T. A $\frac{1}{T}$ se le llama *frecuencia*, o sea el número de veces por segundo que P ocupa la misma posición.

Velocidad y aceleración. — La velocidad del punto P (fig. 18) es un vector tangente a la circunferencia en el punto P, su módulo constante

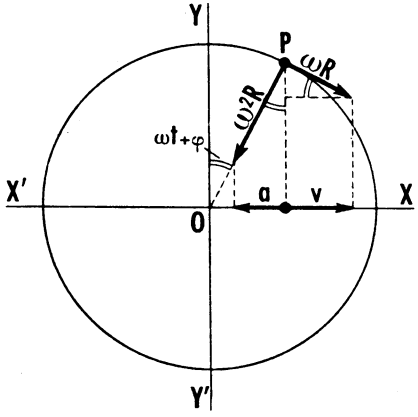


FIG. 18

es igual a ωR. La proyección de su velocidad, que será la del movimiento armónico simple, vale $v = \omega R \cos(\omega t + \varphi)$. Lo mismo habríamos hallado derivando $x = R \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega R \cos(\omega t + \varphi)$$

La aceleración del punto P tiene sólo componente normal y vale $a_n = \omega^2 R$. Su proyección vale $-\omega^2 R \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$; es decir, que la aceleración del movimiento armónico simple es proporcional a la elongación y de signo contrario al sentido de desplazamiento. Partiendo de esta relación puede definirse el movimiento armónico simple como el movimiento tal que la aceleración es proporcional y de signo contrario a la distancia al centro; de aquí puede deducirse la ecuación del movimiento.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ELONGACIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE DICHO MOVIMIENTO. — Para que la representación sea más fácil, puede supo-

nerse que la posición inicial de P esté en Y, de forma que $\varphi = 0$, de aquí que las ecuaciones de la elongación, velocidad y aceleración son: $x = R \operatorname{sen} \omega t$, $v = R\omega \cos \omega t$, $a = -\omega^2 R \operatorname{sen} \omega t$, o bien, sustituyendo por su valor $\frac{2\pi}{T}$:

$$x = R \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t; \qquad v = \omega R \cos \frac{2\pi}{T} t; \qquad a = -\omega^2 R \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$$

(fig. 19).

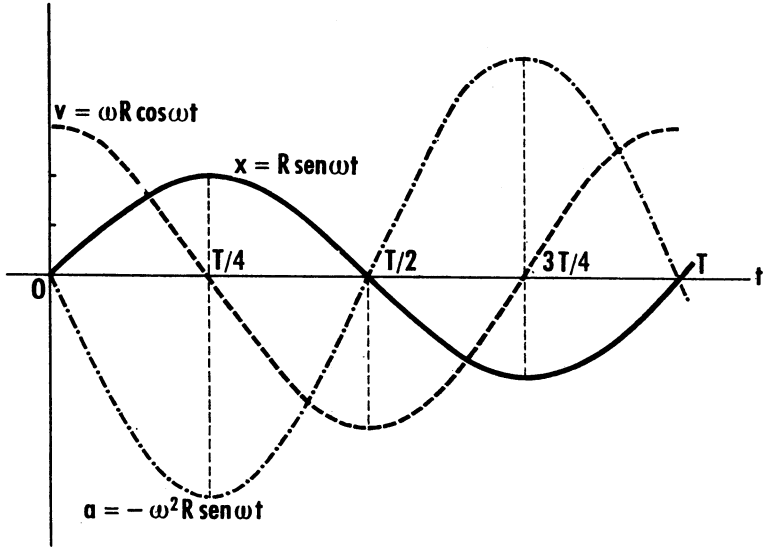


FIG. 19

$$\text{Para } t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ a = 0 \\ v = R\omega \end{cases} \quad t = \frac{T}{4} \begin{cases} x = R \\ a = -\omega^2 R \\ v = 0 \end{cases} \quad t = \frac{3T}{4} \begin{cases} x = -R \\ a = \omega^2 R \\ v = 0 \end{cases}$$

$$t = T \begin{cases} x = 0 \\ a = 0 \\ v = R\omega \end{cases}$$

El período T es el mismo para la elongación, velocidad y aceleración. Se repite el movimiento a intervalos de tiempo constante T, pero se invierte el sentido a intervalos de tiempo $\frac{T}{2}$. Cuando un móvil recorre una trayectoria con movimiento de vaivén, es decir, invirtiendo el sentido del movimiento, se llama *movimiento oscilatorio*. El movimiento armónico sim-

ple es oscilatorio, siendo el punto O el centro de la oscilación. Al período T se le llama período de la oscilación completa, y a $\frac{T}{2}$ período de semioscilación.

Composición de movimientos. — Si un móvil está sometido a varios movimientos, determinaremos el vector desplazamiento resultante sumando vectorialmente los vectores desplazamiento elementales debidos a cada uno de los movimientos. La velocidad será la suma vectorial de las velocidades, y lo mismo la aceleración.

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y UNIFORMES. — La velocidad resultante es la suma vectorial de las velocidades de los movimientos componentes. Esta velocidad será constante, luego el movimiento será rectilíneo y uniforme, siendo la trayectoria la recta determinada por la dirección del vector velocidad resultante. Ejemplo: una canoa que atraviesa un río sigue en la dirección de la resultante de su velocidad y la de la corriente.

MOVIMIENTO RESULTANTE DE UNO RECTILÍNEO UNIFORME Y OTRO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO DE DIRECCIONES PERPENDICULARES. — Las componentes de la aceleración serán $a_x = 0$; $a_y = a =$ constante (fig. 20). La componente horizontal de la velocidad será constante $v_x = v_1$. La componente ver-

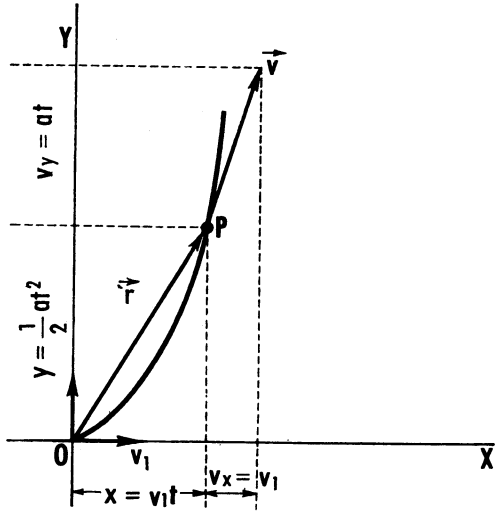


FIG. 20

tical será $v_y = a \cdot t$ (supuesta nula la velocidad inicial del movimiento acelerado). Las componentes del vector posición en un instante t serán: $x = v \cdot t$, $y = \frac{1}{2}a \cdot t^2$; eliminando el tiempo entre estas dos expresiones tenemos la

ecuación de la trayectoria $y = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{x}{v_1}\right)^2 = \frac{1}{2} a \frac{x^2}{v_1^2}$; es decir, la trayectoria es una parábola de vértice el origen y de eje OY.

Resultante de dos movimientos armónicos simples. — Podemos suponerlos del mismo período. Sus ecuaciones serán: $x_1 = R_1 \text{ sen } (\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = R_2 \text{ sen } (\omega t + \varphi_2)$; sabemos que cada uno de estos dos movimientos puede considerarse proyección de uno circular, o mejor, proyección sobre OX, del vector de posición del punto que recorre la circunferencia. La proyección de la resultante de dos vectores sobre un eje es igual a la suma de las proyecciones de los vectores sumandos, sobre el mismo eje.

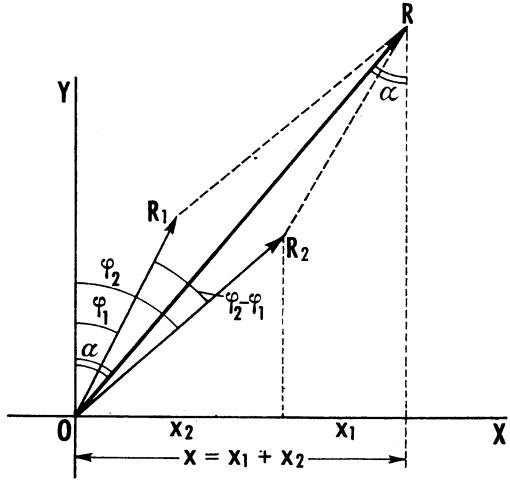


FIG. 21

Así pues, para hallar la resultante de los dos movimientos proyectaremos sobre OX la resultante de los dos vectores de posición. Para simplificar los cálculos tomamos $t = 0$. El módulo de la resultante lo obtenemos aplicando el teorema del coseno: $R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ (fig. 21).

La pulsación ω es la misma que la de los dos movimientos, y la fase inicial la hallaremos por su tangente:

$$\text{tg } \alpha = \frac{R_1 \text{ sen } \varphi_1 + R_2 \text{ sen } \varphi_2}{R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2}$$

El movimiento resultante tiene por ecuación $x = R \text{ sen } (\omega t + \alpha)$.

Si $R_1 = R_2$ $R^2 = 2R_1^2 [1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] = 4R^2 \cos^2 \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$

$$R = 2R_1 \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad \text{Si} \quad \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0 \quad \text{o} \quad 2K\pi, \qquad R = 2R_1;$$

$$\text{Si} \quad \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad R = 0, \quad \text{o si} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = (2K+1)\pi, \qquad R = 0$$

En este caso la amplitud del movimiento resultante es máxima o se anula, según que la diferencia $\varphi_2 - \varphi_1$ sea múltiplo par o múltiplo impar de π.

COMPOSICIÓN DE DOS MOVIMIENTOS ARMÓNICOS PERPENDICULARES. — 1) *Del mismo período.* Uno de ellos sobre el eje OX de ecuación $x = R \text{ sen } \omega t$; el otro de ecuación $y = R' \text{ sen } (\omega t + \varphi)$. Un punto cuyo movimiento sea el resultante de estos dos tiene por coordenadas: x según OX, y según OY.

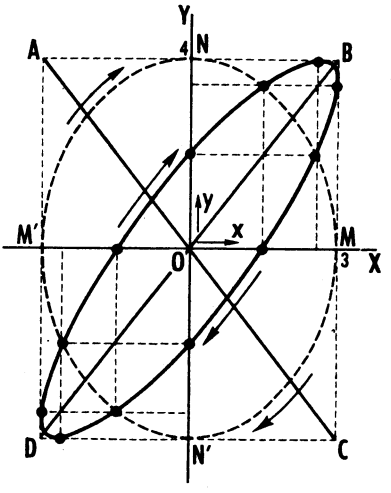


FIG. 22

Así pues, determinamos su posición en cada instante dando valores a t. Si queremos determinar la ecuación de la trayectoria, eliminaremos t entre las dos ecuaciones anteriores. La ecuación resulta ser una elipse de centro O y cuyo eje mayor forma un ángulo con OX que depende de φ. Siendo R el valor máximo de x, R' el de y, la trayectoria estará inscrita en el rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados, de base $2R$ y altura $2R'$. En la figura 22 hemos representado el movimiento resultante de $x = 3 \text{ sen } \omega t$, $y = 4 \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ (Es la elipse de trazo lleno.)

$$\text{Si } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad x = 3 \text{ sen } \omega t \quad y = 4 \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos \omega t$$

Vamos a eliminar a t:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } \omega t = \dfrac{x}{3} \\ \cos \omega t = \dfrac{y}{4}\end{array}\right\} \text{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}; \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(despejando sen ωt y cos ωt, elevando al cuadrado y sumando, obtenemos $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$), ecuación de una elipse de semiejes 3 y 4, cuyos ejes coinciden con los coordenados (en la figura elipse de trazos).

Si el valor de $\varphi = 0$, las ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \text{ sen } \omega t \\ y = 4 \text{ sen } \omega t \end{array}\right\}$$

dividiendo queda $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$,

despejando y; $y = \dfrac{3}{4} x$, ecuación de la recta DB, si $\varphi = \pi$ la recta sería AC.

2) *De distinto período.* Si los períodos no son iguales la trayectoria no es sencilla, pero podemos considerar el caso en que los períodos están en una relación simple $\dfrac{T}{T'} = \dfrac{k}{k'}$, o sea, $k'T = kT'$.

$$\text{Sean } \left.\begin{array}{l} x = a \text{ sen } \dfrac{2\pi}{T} t \\ y = b \text{ sen } \dfrac{2\pi}{T'} t \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{las ecuaciones de los movimientos} \\ \text{(hemos supuesto } \varphi = 0); \\ \text{para } t = 0 \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

al cabo de un tiempo $t = k'T = kT'$

$$\left.\begin{array}{l} x = a \text{ sen } \dfrac{2\pi}{T'} KT' = a \text{ sen } 2\pi K = 0 \\ y = b \text{ sen } \dfrac{2\pi}{T} K'T = a \text{ sen } 2\pi K' = 0 \end{array}\right\}$$

el punto móvil ha regresado a su punto de partida, ya que x e y coinciden con los valores iniciales. Así pues, la trayectoria se cierra al cabo de un tiempo $t = kT' = kT$; la trayectoria se cierra siempre al cabo de un tiempo múltiplo común de los dos períodos, de aquí que el período del movimiento resultante es el mínimo común múltiplo, de los períodos de

los componentes. A las trayectorias resultantes se les llama *curvas* o *figuras de Lissajous.*

En la figura 23 está dibujada una curva de Lissajous para $\frac{T'}{T} = \frac{1}{3}$. Describe la curva *ABCDCBA.*

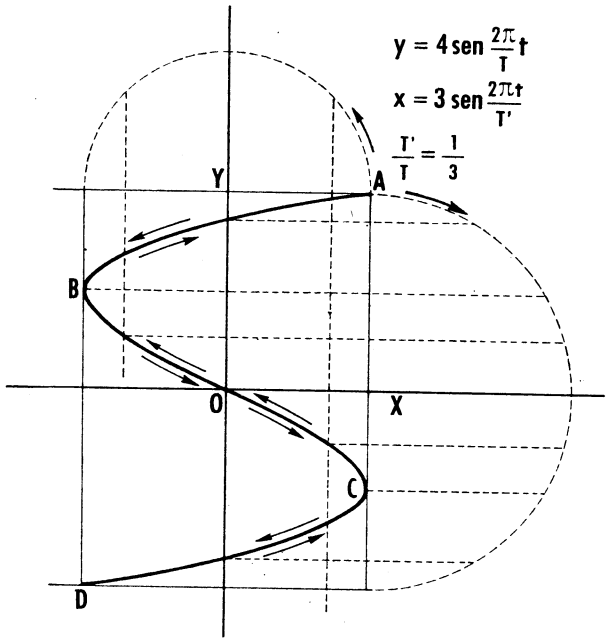


FIG. 23

Movimiento de proyectiles. — 1.° Movimiento vertical ascendente. Si disparamos un proyectil verticalmente en sentido ascendente estará sometido a una deceleración debida a la acción de la gravedad, cuya aceleración g es constante en cada lugar, su dirección es vertical y el sentido descendente. Podemos aplicar las fórmulas dadas para el movimiento rectilíneo uniformemente retardado:

$$v = v_0 - gt; \qquad h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} gt^2,$$

sustituyendo a por g en el lugar considerado, llamando h al espacio. Para determinar la altura máxima alcanzada por el proyectil indicaremos que la velocidad en aquel punto es nula (se para). $0 = v_0 - g \cdot t$, luego,

$$t = \frac{v_0}{g}; \qquad h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

2.° *Movimiento vertical descendente.* Basta escribir las fórmulas anteriores con el signo más (movimiento acelerado):

$$v = v_0 + g \cdot t, \quad h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Si el proyectil cae sin velocidad inicial:

$$\left.\begin{array}{l} v = gt \\ h = \dfrac{1}{2} gt^2 \end{array}\right\} \; h = \frac{1}{2} g \left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \quad \text{y de aquí}$$

$v = \sqrt{2gh}$, que nos da la velocidad debida a una altura.

De aquí deducimos que el tiempo que tarda en caer

$$t = \frac{v}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

desde una altura h es el mismo que el que tarda en ascender disparado desde el suelo, con la misma velocidad con que llega al caer de dicha altura.

3.° *Movimiento oblicuo.* Supongamos un proyectil disparado con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal. Tomemos el eje OX horizontal y OY vertical (fig. 24). Las componentes de la velocidad inicial

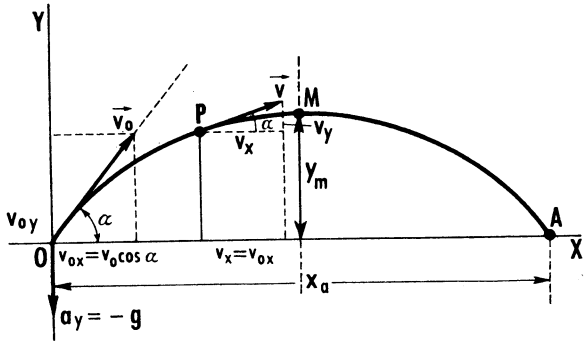


FIG. 24

son $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0$ sen α. La aceleración tiene una sola componente $a_y = -g$.

La velocidad, al cabo de un tiempo t, tiene por componentes:
$v_x = v_0 \cos \alpha$, constante, pues no hay aceleración en la dirección OX,
$v_y = v_0$ sen $\alpha - gt$.
El movimiento del proyectil es el resultante de la composición de dos movimientos rectilíneos perpendiculares, uno uniforme y otro retardado.

Las componentes del vector posición serán:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y &= v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \text{despejando } t \text{ en } x \text{ y sustituyendo en } y$$

$$y = v_0 \operatorname{sen} \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

finalmente queda la ecuación de la trayectoria:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

que es una parábola de eje vertical. Dicha parábola corta al eje OX en el origen y en otro punto A. La distancia OA es el alcance (distancia del punto de partida al de caída, supuesto terreno horizontal).

Para determinar el alcance hacemos:

$$y = 0 = x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right)$$

cuyas soluciones son:

$$x = 0, \quad x = 2 v_0^2 \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

(es máximo si $2\alpha = 90°$, o sea $\alpha = 45°$)
y tarda un tiempo

$$t_A = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2 v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

Por ser esta parábola simétrica, el máximo está en la mediatriz de OA. El tiempo que tarda en llegar al máximo es

$$t_m = \frac{1}{2} t_A = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

luego

$$y_m = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t_m - \frac{1}{2} g t_m^2$$

$$y_m = (v_0 \operatorname{sen} \alpha) \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \right)^2$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

A esta ordenada y_m se le llama *flecha*. Si queremos determinar el vector velocidad en cualquier instante, aplicamos

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt)^2}$$

Con esto tenemos el módulo.

La dirección podemos darla por la tangente del ángulo que forma con la horizontal:

$$\text{tg } \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \text{ sen } \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha}$$

que será la inclinación del proyectil en este instante. Se puede comprobar fácilmente que la inclinación en el máximo es nula, y en el punto de impacto A el ángulo es el suplementario de α.

Si se dispara horizontalmente $\alpha = 0$, y la ecuación es:

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos \alpha}.$$

Nota. — En todos estos movimientos se ha despreciado el efecto de la resistencia del aire. Es el problema ideal del movimiento de proyectiles.

PRÁCTICAS

Medida de velocidades. Uso del cronómetro. — Supongamos que vamos montados en un automóvil que circula por una carretera donde están indicados los kilómetros. Si deseamos hallar la velocidad media del vehículo en un trayecto determinado, mediremos el tiempo que tarda en recorrer una distancia comprendida entre dos postes indicadores de los kilómetros. Para medir el tiempo podemos utilizar un cronómetro, al cual ponemos en marcha (disparamos) en el instante en que pasamos frente al primer poste y lo paramos en el momento de cruzar el segundo. Leemos el tiempo transcurrido en el cronómetro, y como que hemos escogido un espacio conocido, para hallar la velocidad media dividimos el espacio por el tiempo medido en el cronómetro. En general, siempre que queramos determinar la velocidad de un móvil, debemos fijar dos puntos de su trayectoria, cuya distancia conocemos o medimos, y con un cronómetro, hallamos el tiempo que ha tardado un punto del móvil, en pasar sucesivamente frente a los dos puntos elegidos. Por este procedimiento podemos medir la velocidad de la corriente de un río. Medimos la distancia entre dos puntos de una orilla y lanzamos al agua un flotador (por ejemplo, un trozo de corcho); bastará después con medir el tiempo transcurido desde que el flotador pasa frente al primer punto hasta que pasa frente al segundo. La velocidad será igual a la distancia dividida por el tiempo.

Para ejercitarse en el manejo del cronómetro hay que acostumbrarse a ponerlo en marcha y pararlo en el momento preciso, para lo cual se puede repetir varias veces la medida de la duración de un mismo intervalo de tiempo, anotando dicha medida en cada caso. De esta forma nos damos cuenta de las posibles discrepancias en nuestras medidas.

Para determinar el período de un movimiento de rotación uniforme medimos con el cronómetro el tiempo que el punto móvil tarda en dar un cierto número de vueltas, dividimos el tiempo por el número de vueltas y tenemos el período. Conocido el período podemos hallar la velocidad angular.

Podemos usar el cronómetro para medir distancias, conociendo la velocidad del móvil. Si disparamos el cronómetro en el instante en que vemos un relámpago y lo paramos al oír el trueno, podremos hallar la distancia del lugar donde ha ocurrido, suponiendo conocida la velocidad del sonido en aquellas condiciones. Para hallar la distancia de una pieza de artillería que está disparando, medimos el tiempo transcurrido entre que vemos el fogonazo y oímos el disparo.

Medida de la velocidad de un proyectil. — No podemos utilizar el método anterior, de cociente entre espacio y tiempo, por el hecho de que la velocidad en este caso, acostumbra a ser grande. Por lo tanto, el tiempo que tarda en recorrer un espacio reducido es muy pequeño. Podemos utilizar el siguiente método (fig. 25): Tomamos dos discos de cartulina en los cuales hemos dibu-

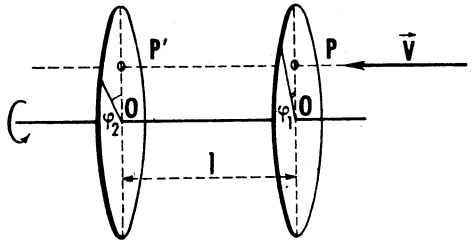


FIG. 25

jado una referencia (por ejemplo, un radio). Los colocamos distantes entre sí una longitud l, solidarios de un eje que pasa por su centros. Este eje va acoplado a un motor que gira con movimiento uniforme y del cual conocemos la velocidad de rotación; por ejemplo, un motor sincrónico que da 50 revoluciones por segundo. Disponemos los discos de forma que los radios queden verticales en la parte superior. Ponemos el motor en marcha y disparamos paralelamente al eje, de forma que el proyectil ocasione un impacto en cada disco. Dibujamos, en cada uno de ellos, el ángulo que forma la recta de unión de los centros del impacto y del disco, con el radio que habíamos dibujado. Medimos dichos ángulos con la mayor precisión posible. El tiempo t empleado por el proyectil en recorrer la distancia l que separa los dos discos, es igual al cociente entre la diferencia de los ángulos y la velocidad angular, es decir, $t = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi N}$.

La velocidad del proyectil será igual al cociente entre la distancia l y el tiempo t; $v = \frac{l}{t}$. La distancia l tiene que ser tal, que el proyectil la recorra en un tiempo inferior al período de rotación, para lo cual repetiremos el experimento variando la distancia l, o la velocidad de rotación del motor.

Ejemplo:

Supongamos $N = 50$ vueltas por segundo, $l = 50$ cm y la diferencia de ángulos $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ radianes; $t = \frac{\frac{\pi}{5}}{2\pi \cdot 50} = \frac{1}{500}$ s.

$$v = \frac{l}{t} = \frac{0{,}5}{\frac{1}{500}} = 250 \text{ m/s.}$$

Situando los discos muy próximos la diferencia de los ángulos será muy pequeña, al ir separando los discos la diferencia de ángulos va aumentando. Cuando el tiempo que tarda el proyectil en atravesar la distancia entre discos es igual al período de rotación, la diferencia de ángulos sería 0. Por esto podíamos haber cometido un error en el tiempo, si el segundo disco hubiese dado una o varias vueltas, durante el tiempo transcurrido entre los dos impactos. Existen otros procedimientos balísticos y electrónicos más precisos.

Registro de un movimiento armónico. — Consiste en inscribir el movimiento que se efectúa en una dirección, sobre una hoja de papel que se desplaza con velocidad constante, en una dirección perpendicular a la del movimiento armónico. El procedimiento más elemental consiste en disponer de un pequeño embudo, con una llave reguladora del paso de líquido, de forma que si lo llenamos de tinta, ésta descienda por el orificio gota a gota. Suspendemos este embudo de un hilo tal, que al colgarlo de un punto, oscile al desplazarlo de su posición de equilibrio. Debajo colocamos una tabla con unas ruedas que se pueda desplazar en dirección perpendicular al plano de oscilación del embudo, sobre cuya tabla adherimos un papel (fig. 26). Tirando de la tabla con un hilo

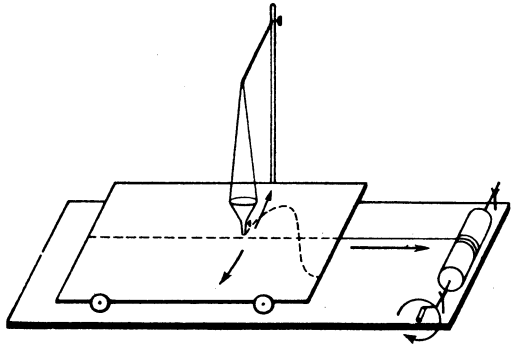


FIG. 26

arrollado a un tambor que puede girar a velocidad constante, al caer la tinta, inscribirá sobre el papel que se desplaza, el movimiento armónico del embudo, que será una sinusoide. En lugar de tinta, puede llenarse el embudo con arena fina.

Si queremos registrar la vibración de un diapasón, sujetamos un estilete en uno de sus extremos de manera que se apoye sobre un cilindro recubierto de papel ennegrecido y que gira a velocidad constante. Situamos el diapasón de forma que su vibración se efectúe en una dirección paralela al eje del cilindro (fig. 27). El número de sinusoides inscritas en una vuelta será igual al cociente de la frecuencia de la vibración y la del movimiento de rotación del cilindro. Podemos utilizar un procedimiento óptico consistente en pegar

un pequeño espejo en el diapasón y recubrir el cilindro con papel fotográfico (fig. 28). Por medio de un sistema óptico adecuado, un rayo luminoso después de reflejarse en el espejo incide en el papel sensible. Una vez revelado y fijado tendremos inscrito el movimiento.

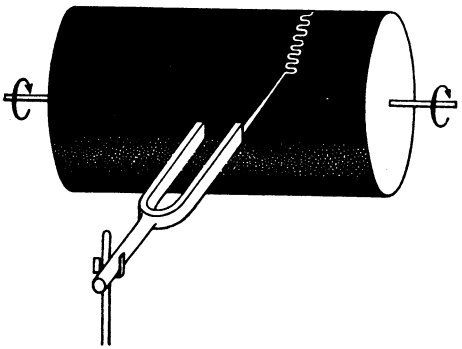


FIG. 27

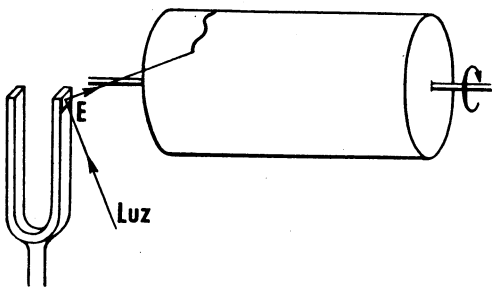


FIG. 28

Observaciones estroboscópicas. — El método estroboscópico, consiste en iluminar u ocultar a intervalos regulares de tiempo, un punto que describe un movimiento periódico. Si el período del movimiento coincide con el intervalo de iluminación, aparentemente veremos el punto inmóvil (ya que sólo lo veremos en el instante de ser iluminado). Lo mismo ocurre si los períodos son múltiples uno de otro, lo cual hay que tener en cuenta al medir el período de un movimiento vibratorio por este método.

Para lograr la iluminación periódica podemos utilizar un disco, con unos orificios equidistantes, que pueda girar a velocidad constante y un sistema óptico, que nos proporcione un rayo luminoso que pase por un agujero determinado (fig. 29). Cuando el disco gira, la luz pasa si encuentra un orificio y esto ocurre cada vez que ha transcurrido un tiempo igual al período de rotación dividido por el número de orificios.

Supongamos una rueda que gira con un período *T*. Fijamos un punto de la misma pegándole un trocito de papel. Disponemos el disco de forma que el rayo luminoso incida en el punto indicado. Al girar el disco y la rueda si el período es el mismo, veremos el punto inmóvil. Si el período del disco es algo menor que el de la rueda, veremos el punto cada vez un poco desplazado en sentido contrario al movimiento y nos parecerá que la rueda gira en sentido contrario. Cuando el período es algo mayor, vemos el punto cada vez más desplazado en el mismo sentido que el de giro de la rueda y nos parece girar en su verdadero sentido. Modificando la velocidad de rotación del disco podremos lograr ver el punto fijo y alterando ligeramente su velocidad observaremos el fenómeno citado antes. Sustituyendo la rueda por un diapasón vibrante, o el macillo de un timbre sonando, operando de manera análoga observaremos el mismo fenómeno, pudiendo determinar su período de vibración.

Se observa el mismo fenómeno, contemplando el punto vibrante a través

de un disco giratorio con unas ventanas radiales equidistantes, estando el punto iluminado constantemente.

Para la realización práctica, se puede utilizar un ventilador en el cual se han sustituido las aspas, por un disco de cartón en el que hemos practicado unas ventanas radiales equidistantes. Regulamos la velocidad de giro, por medio de un reóstato en serie con el motor del ventilador.

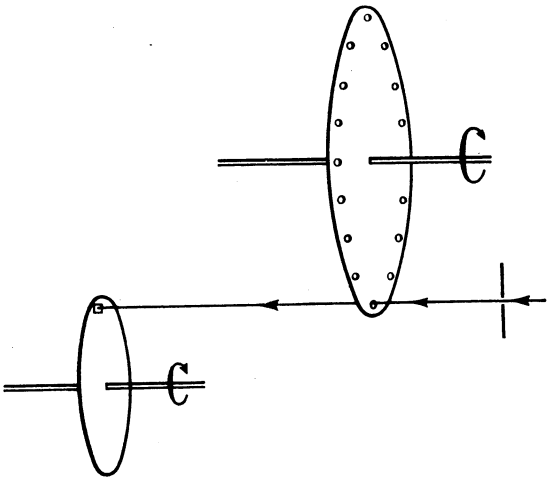


FIG. 29

La iluminación intermitente, se logra por dispositivos electrónicos que nos producen un destello luminoso a intervalos regulares de tiempo, con mayor precisión que el disco giratorio.

Obtención de figuras de Lissajous. — Recordemos la práctica más sencilla de la inscripción de un movimiento armónico. La tabla utilizada se suspende de unos hilos, de modo que pueda oscilar perpendicularmente al plano de oscilación del embudo. Regulamos el período de los movimientos, modificando la longitud de los hilos de los cuales penden. Haciéndolos oscilar simultáneamente y regulando convenientemente los períodos, obtendremos figuras de Lissajous. Con este método, es difícil lograr las figuras perfectas. Puede utilizarse un método óptico, parecido al descrito en la práctica antes citada, colocando un diapasón que vibre en posición perpendicular a otro. A cada uno de ellos hemos pegado un pequeño espejo plano *E* (fig. 30). Un rayo luminoso, reflejado sucesivamente en los dos espejos, va a parar a una pantalla (o a un papel fotográfico). Si los períodos están en una relación sencilla, al vibrar estos dos diapasones obtendremos figuras de Lissajous, ya que se componen ambas vibraciones perpendiculares.

Otro método más fácilmente observable, consiste en unas varillas de acero de sección rectangular, sujetas por un extremo y con una pequeña esfera bruñida en el otro. Al hacerlas vibrar, desplazando el extremo libre en direc-

ción oblicua a los lados de la sección, se componen las vibraciones perpendiculares, normales a dichos lados. Debido a la persistencia de las imágenes en la retina, observaremos distintas figuras de Lissajous, según la relación entre las dimensiones de la sección rectangular de las varillas.

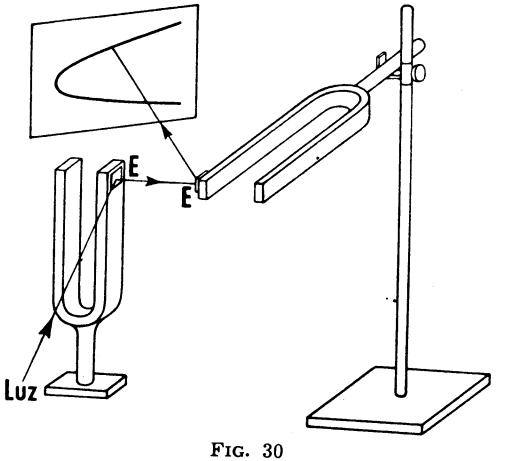


FIG. 30

CUESTIONES

1. *Un punto describe una circunferencia con velocidad angular constante. ¿Tiene aceleración?*

2. *Un punto describe una circunferencia con aceleración angular constante. Determinar, si ha partido del reposo, su velocidad angular y la lineal al cabo de un tiempo t. ¿Serán constantes su aceleración tangencial y normal?*

3. *Citar ejemplos de movimientos circulares uniformes y acelerados.*

4. *Recordar tipos de movimientos periódicos observados.*

5. *Un movimiento circular uniforme. ¿Es periódico? ¿Es oscilatorio?*

6. *Describir algún movimiento armónico simple.*

7. *¿Es movimiento armónico simple, la proyección de uno circular uniforme, sobre una tangente?*

8. *Las ruedas de una bicicleta tienen distinto diámetro ¿se desgastan por igual los neumáticos?*

PROBLEMAS

1. Las componentes del vector de posición de un punto son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3t^2 + 2t - 5 \\ y = t - 3 \end{array}\right\}$$ determinar la velocidad y aceleración en el instante $t = 2$ segundos.

2. La ecuación de un movimiento rectilíneo es $x = 35 + 4t - 8t^2 + t^3$. ¿Cuál es su velocidad y aceleración para $t = 3$ segundos?

3. Un tren parte del reposo y al cabo de 20 s marcha a 50 km/h. Luego prosigue con esta velocidad durante 4 horas, a partir de las cuales se frena uniformemente de manera que transcurridos 40 segundos se para. Determinar la aceleración inicial, la deceleración final y el espacio recorrido. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

4. Un punto recorre una recta con una velocidad de 30 m/s. Al llegar a cierto punto, se le aplica una aceleración de 2 m/s² en la misma dirección y sentido que su velocidad, la cual actúa durante 5 s. Representar gráficamente la velocidad del móvil y el espacio recorrido a partir del punto donde se le aplica la aceleración hasta 4 s después de haber cesado aquélla.

5. Un coche circula por una carretera a 36 km/hora y otro por una carretera perpendicular a la primera, con velocidad de 72 km/hora ambos hacia el cruce. Al llegar los dos a 40 m del cruce, el segundo automovilista ve el primer coche y frena con una deceleración de 5 m/s². ¿Chocarán los vehículos? (Supóngase los coches puntos móviles)

6. Determinar la velocidad angular de la Tierra y la velocidad lineal de un punto situado a la latitud de 30° (longitud de un círculo máximo 40 000 km).

7. Un ciclista marcha a una velocidad de 36 km/h. Las ruedas tienen un diámetro de 120 cm. Determinar la velocidad angular de un punto de la periferia de la rueda. Suponiendo que el ciclista desde que partió del reposo hasta adquirir dicha velocidad ha acelerado constantemente, tardando en alcanzarla 2 minutos, determinar: aceleración tangencial del mismo punto de la periferie, aceleración angular y aceleración normal en el instante de alcanzar la velocidad citada.

8. Un barco navega siguiendo el ecuador a una velocidad de 20 millas por hora, determinar la velocidad angular de este barco y cuánto tardaría en dar la vuelta al mundo siguiendo siempre el ecuador. (Longitud del ecuador 40000 km.) (1 milla marina es el arco de circunferencia máxima de 1').

9. La ecuación de cierto movimiento armónico simple es $x = 8 \text{ sen } (\frac{\pi}{8} t + \frac{\pi}{4})$. Determinar amplitud, período, frecuencia y fase inicial. Hallar también la elongación, la velocidad y aceleración al cabo de 2 s.

10. Un punto describe un movimiento armónico simple de amplitud 20 cm y su aceleración máxima es de 5 m/s². Hallar la velocidad máxima y el período.

11. Una canoa debe atravesar un río de 40 m de ancho. Su velocidad es de 10 m/s y la de la corriente 4 m/s. Si parte normalmente a la orilla, determinar en qué punto alcanza la orilla opuesta y cuánto ha tardado. Si quiere llegar normalmente a la orilla opuesta ¿con qué inclinación debe cruzar el río respecto a la corriente?

12. Un avión vuela en la dirección SN con la velocidad de 720 km/h hacia el N. Sopla viento en la dirección NE del tercer cuadrante y a velocidad de 20 m/s. Determinar la velocidad resultante. Determinar la dirección y velocidad del avión para ir en la dirección SN con la velocidad resultante de 720 km/h.

13. Lanzamos un cuerpo en dirección vertical ascendente con velocidad de 200 m/seg. Determinar la altura máxima ascendida y su velocidad a mitad de dicha altura, al ascender o al caer.

14. Desde una cierta altura sin velocidad inicial dejamos caer un cuerpo que llega al suelo con una velocidad de 60 m/seg. Determinar la altura y el tiempo empleado en la caída.

15. Un avión que vuela a 2000 m horizontalmente con una velocidad de 600 km/h suelta una bomba. Determinar a qué distancia de la vertical de la posición del avión, en el momento del lanzamiento, caerá la bomba.

CAPÍTULO III

ESTÁTICA

Concepto estático de fuerza. — La idea más elemental e intuitiva de fuerza nos la proporciona el esfuerzo muscular. Si aplicamos un esfuerzo a un cuerpo en reposo, podemos moverlo, y aplicando otro que se oponga al movimiento podemos pararlo. Dos niños que tiran de una cuerda en sentidos contrarios, con el mismo esfuerzo, permanecen en reposo. Cuando aplicamos varias fuerzas a un cuerpo y éste permanece en reposo, diremos que el sistema está equilibrado; en el caso anterior los esfuerzos de los niños se equilibran. La *Estática* es la parte de la Mecánica que estudia en qué condiciones las fuerzas están en equilibrio.

Supongamos un resorte en espiral; aplicando una fuerza en su extremo, el resorte se deforma y podemos determinar su alargamiento. Aplicando una fuerza doble que la anterior, el alargamiento es doble. Es decir, existe proporcionalidad (dentro de ciertos límites) entre esfuerzos (fuerzas) y alargamientos. Esto nos permite medir fuerzas con el aparato anteriormente citado, llamado *dinamómetro,* el cual debe calibrarse previamente (véase *Prácticas*).

Carácter vectorial de las fuerzas. — Supongamos que hemos atado una cuerda a una piedra y tiramos de la cuerda verticalmente hacia arriba. La fuerza aplicada es una magnitud vectorial cuyo módulo es la cuantía del esfuerzo, la dirección vertical y el sentido de abajo arriba. No quedaría determinada la fuerza con sólo dar su valor, hace falta dirección y sentido. Si la fuerza se aplica a un punto, éste es el punto de aplicación del vector fuerza, pero si se aplica a un cuerpo, el vector fuerza se considera un vector deslizante y puede suponerse aplicada en cualquier punto de su recta en acción. Es lo que ocurre al tirar de una cuerda: la fuerza puede considerarse aplicada en cualquier punto de ella, y el mismo efecto se logra con una cuerda más o menos larga.

Así pues, representaremos las fuerzas por vectores de módulo igual a la cuantía de la fuerza, a una escala determinada, y de la misma dirección y sentido.

Composición de fuerzas aplicadas a un punto. — Dadas dos fuerzas concurrentes, las componemos hallando la suma o resultante de los vectores fuerza, tal como se había indicado en el cálculo vectorial. Sean $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ las fuerzas (fig. 31); construimos el paralelogramo de vectores (que en

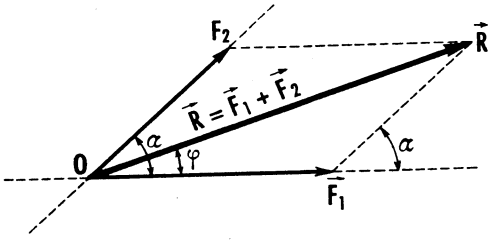


FIG. 31

este caso se llama paralelogramo de fuerzas) y hallamos la resultante $\vec{R}$.

Para obtener el módulo aplicamos el teorema del coseno al triángulo OF_1R:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

para conocer la dirección podemos dar el ángulo que $\vec{R}$ forma con $\vec{F}_1$, para lo cual recordemos la relación trigonométrica entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos

$$\frac{F_2}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{R}{\operatorname{sen} \alpha}$$

de donde:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{F \operatorname{sen} \alpha}{R}$$

En el caso de un sistema de tres fuerzas concurrentes, se aplica lo indicado en el capítulo 1. Para la composición gráfica se utiliza el polígono de vectores (que ahora es el polígono de fuerzas). En la figura 32 se ha compuesto las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, cuya resultante es $\vec{R}$. Para determinar analíticamente módulo y dirección de la resultante, es más fácil utilizar el método de las proyecciones, escogiendo un sistema de ejes perpendiculares de origen el punto de concurrencia. Proyectando las fuerzas sobre ellos y recordando que la proyección de la resultante sobre un eje es igual a la suma de las proyecciones de las componentes sobre el mismo eje. Llamamos φ_1, φ_2, φ_3 a los ángulos que las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ forman con el eje OX; la proyección de la resultante R sobre OX vale:

$$R_x = F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \cos \varphi_2 + F_3 \cos \varphi_3$$

y sobre OY:

$$R_y = F_1 \text{ sen } \varphi_1 + F_2 \text{ sen } \varphi_2 + F_3 \text{ sen } \varphi_3$$

siendo

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{R_y}{R_x}$$

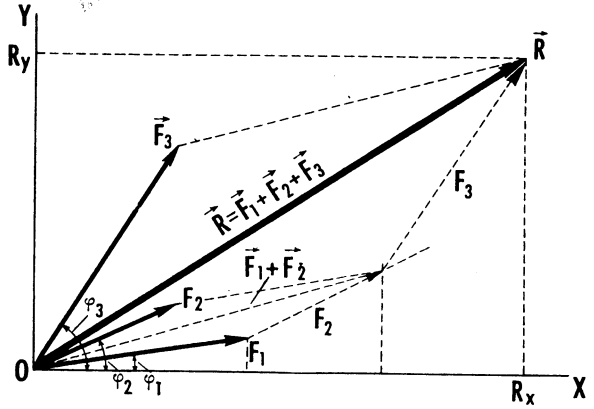


FIG. 32

Si tenemos que componer un sistema de n fuerzas concurrentes, podemos aplicar lo dicho antes generalizando a n vectores. La resultante de un sistema de n fuerzas concurrentes tendrá por componentes:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \cos \varphi_2 + F_3 \cos \varphi_3 + \ldots + \\ &\quad + F_n \cos \varphi_n = \sum_1^n F_i \cos \varphi_i \\ R_y &= F_1 \text{ sen } \varphi_1 + F_2 \text{ sen } \varphi_2 + F_3 \text{ sen } \varphi_3 + \ldots + \\ &\quad + F_n \text{ sen } \varphi_n = \sum_1^n F_i \text{ sen } \varphi_i \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ \text{tg } \varphi &= \frac{R_y}{R_x} \end{aligned}$$

indicando la suma con el símbolo $\sum_1^n$.

Si dos fuerzas concurrentes son iguales en módulo y dirección, pero de sentidos contrarios, su suma es nula.

Par de fuerzas. — Dos fuerzas paralelas del mismo módulo y de sentidos contrarios forman un par de fuerzas.

Momento de un par. — Es el producto del módulo de una de las fuerzas por la distancia entre ellas. A la distancia entre las fuerzas se le llama *brazo* del par.

Vector momento. —Llamamos momento de una fuerza $\vec{F}$ respecto a un punto O (fig. 33) al producto vectorial de $\vec{r}$ por $\vec{F}$, o sea $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$. El módulo del momento es $M = r \cdot F \cdot \text{sen } \varphi = F \cdot d$; es decir, el módulo del

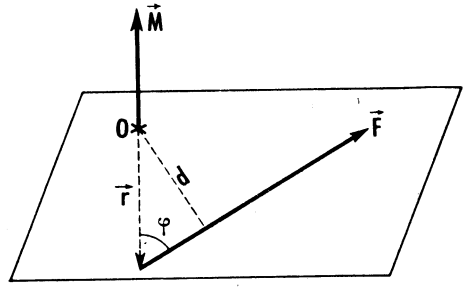


FIG. 33

momento es igual al producto de la fuerza por la distancia del punto a ella. La dirección, la perpendicular al plano determinado por la fuerza y el punto O, y el sentido el dado por la regla del sacacorchos (tal como en el producto vectorial). El vector momento es un vector libre.

Podemos componer los momentos de un sistema de fuerzas respecto a un punto sumando los vectores momento de cada fuerza respecto a dicho punto. A esta suma se llama *momento resultante.*

El momento de un par de fuerzas coincide con la suma de los momentos de las fuerzas que lo constituyen respecto a un punto cualquiera (es independiente del punto respecto al cual tomamos momentos). Sea el par formado por las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (fig. 34). El momento $\vec{M}_1$ de la fuerza $\vec{F}_1$ respecto a O tiene por módulo $M_1 = F_1 \cdot d_1$; el de $\vec{F}_2$ respecto al mismo punto tiene por módulo $M_2 = F_2 \cdot d_2$; la dirección del vector momento es la perpendicular al plano determinado por las fuerzas; los momentos de las dos fuerzas tienen la misma dirección, y aplicando la regla del producto vectorial vemos que son iguales sus sentidos. Para componerlos sumaremos los módulos. El momento del par vale, pues:

$$M = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F \cdot (d_1 + d_2) = F \cdot d$$

(ya que los módulos son iguales: $F_1 = F_2 = F$). El módulo del momento de un par coincide con el valor dado por la definición anteriormente citada.

El momento caracteriza un par de fuerzas, y dos pares son equivalentes si los momentos son iguales. Dos pares se componen sumando vectorialmente sus momentos, y éste será el momento del par equivalente a aquéllos.

El módulo de un momento se mide en unidades de fuerza por unidades de longitud.

Sistemas equivalentes. — En general, dos sistemas de fuerzas se dice que son equivalentes cuando tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto a un punto cualquiera. Un sistema de fuerzas

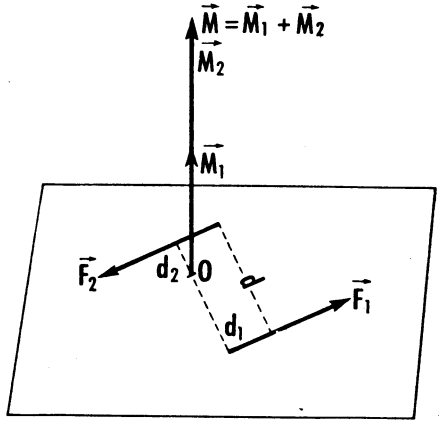


FIG. 34

concurrentes equivale a su resultante, pues el momento resultante del sistema es igual al momento de la resultante respecto al mismo punto (fig. 35)

$$\vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 = \vec{r} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \wedge \vec{R}$$

tienen la misma resultante y el mismo momento resultante.

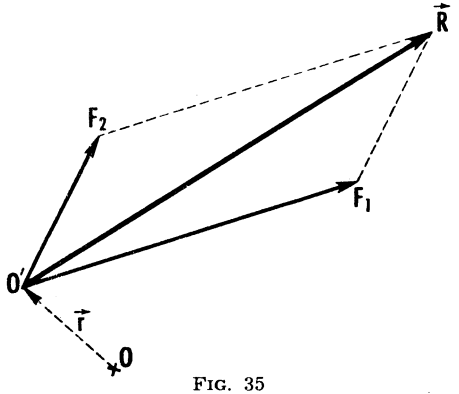


FIG. 35

Problema: Tenemos dos fuerzas iguales y de sentidos contrarios de módulo 20 kp distantes 4 metros. Determinar el módulo de dos fuerzas iguales y de sentidos contrarios distantes 10 metros que formen un sistema equivalente al primero. (El kilogramo-fuerza lo indicamos por kp.)

El primer sistema de fuerzas forma un par de módulo $M = 20 \cdot 4 = 80$ kp m.

El segundo sistema forma un par cuyo momento debe ser igual a M así pues $F \cdot 10 = 80$; $F = 8$ kp. El módulo cada una de las fuerzas del segundo sistema es de 8 Kp.

Composición de fuerzas aplicadas a un sólido. — Las fuerzas aplicadas a un sólido, en general no son concurrentes. Por ser vectores deslizantes, no las podemos componer directamente si no concurren. Sean $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ las fuerzas aplicadas a un sólido y no concurrentes (fig. 36). Apliquemos en

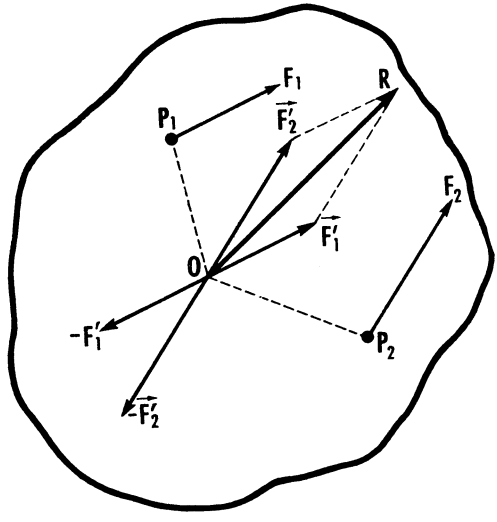


FIG. 36

el punto O dos fuerzas, una $\vec{F}_1'$ igual a la $\vec{F}_1$, y otra $-\vec{F}_1'$ opuesta. El sistema es equivalente (ya que hemos añadido al sistema dos vectores opuestos cuya suma es nula y es nulo su momento resultante respecto a cualquier punto). Podemos considerar la fuerza $\vec{F}_1'$ y ver que las $\vec{F}_1$ y $-\vec{F}_1'$ forman un par cuyo momento vale $\vec{OP}_1 \wedge \vec{F}_1$. Esto indica que al desplazar una fuerza de un sistema debemos añadir un par de momento igual al de la fuerza respecto a un punto de la nueva dirección, o bien un par tal que el módulo del momento es el producto de la fuerza por la distancia entre la dirección inicial y final de la fuerza. Hacemos lo mismo con la $\vec{F}_2$ y resulta aplicada en O, pero habiendo añadido un par de mo-

mento $\overrightarrow{OP_2} \wedge \overrightarrow{F_2}$. Como ahora las fuerzas $\overrightarrow{F_1}'$ y $\overrightarrow{F_2}'$ son concurrentes, las sumamos y obtenemos la resultante $\overrightarrow{R}$; pero el sistema equivale a esta resultante $\overrightarrow{R}$ y al par de momento $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OP_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \overrightarrow{F_2}$, que es el resultante de las fuerzas respecto a O. En general, un sistema de fuerzas aplicadas a un sólido equivale a su resultante general (suma vectorial de las fuerzas), cuya línea de acción pasa por un punto arbitrario, y a un par, de momento igual a la suma vectorial de los momentos de cada una de las fuerzas respecto al punto citado, por donde pasa la línea de acción de la resultante general.

Sistema nulo o equilibrado. — Es el que tiene nula la resultante general y el momento resultante respecto a un punto cualquiera. Dos fuerzas opuestas forman un sistema nulo o equilibrado.

Condición de equilibrio de un sólido. — Un sólido está en equilibrio cuando el sistema de fuerzas aplicadas es equivalente a un sistema nulo. Es decir, que la resultante general y el momento resultante son nulos. Así pues, un sólido está en equilibrio cuando la suma de las fuerzas aplicadas es igual a cero y la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto cualquiera es igual a cero. La condición de equilibrio considerando las componentes es: suma de las componentes de las fuerzas según los ejes iguales a cero, y suma de componentes del momento iguales a cero. Si las fuerzas están en el mismo plano

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

Si las fuerzas son concurrentes, basta que sea nula la resultante para que haya equilibrio, pues el momento respecto al punto de concurrencia es nulo. Para equilibrar un sistema de fuerzas concurrentes basta aplicar una fuerza opuesta a la resultante. Un par de fuerzas tiene resultante general nula; para equilibrarlo basta aplicar un par de momento opuesto al que deseamos equilibrar.

Si consideramos fuerzas en un mismo plano, los momentos de ellas respecto a un punto cualquiera de este plano son vectores de la misma dirección (perpendicular al plano que contiene las fuerzas), y para componerlos basta sumar o restar los módulos según sean iguales o contrarios sus sentidos. En la figura 37 vemos que el momento $\overrightarrow{M_1}$ de $\overrightarrow{F_1}$ respecto O_1 va hacia arriba; en cambio, el de $\overrightarrow{F_2}$ respecto a O_2 va hacia abajo. Para componerlos restamos los módulos, siendo el sentido el del mayor. Podemos hacer un convenio de signos para establecer el sentido, tomando el signo positivo para el momento en sentido descendente, y negativo para el de sentido ascendente; así el $\overrightarrow{M_1}$ será positivo, y el $\overrightarrow{M_2}$ negativo. Como

regla práctica para la determinación del signo podemos establecer (a la vista de la fig. 37) que si uniendo el punto con el origen de la fuerza, ésta parece que haría girar a la figura alrededor del punto en el sentido de las agujas del reloj, el sentido es positivo; en caso contrario, negativo.

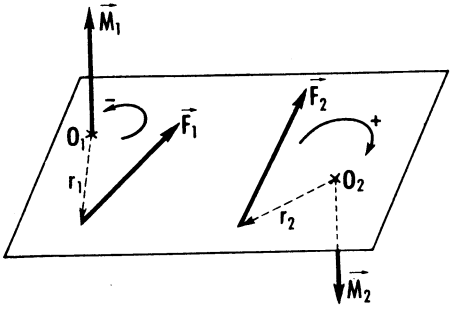


FIG. 37

Resultante de un sistema de fuerzas paralelas.—Sean $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ dos fuerzas paralelas del mismo sentido distantes d (fig. 38). Este sistema equivale a su resultante situada a una distancia tal que el momento de esta resultante respecto a un punto cualquiera sea igual a la suma de momentos de las fuerzas respecto al mismo punto (condición de equivalencia de sistemas). Tomemos momentos respecto a A. El momento de $\vec{F}_1$ respecto a A

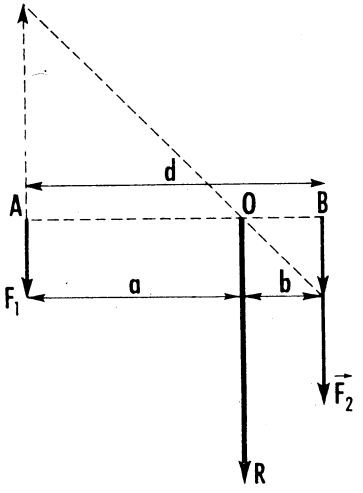


FIG. 38

es cero. El módulo del momento de $\vec{F}_2$ respecto a A vale $F_2 \cdot d$; luego el módulo del momento resultante $M = F_2 \cdot d$ (según el convenio anterior, este momento es positivo). Dicho momento debe ser igual al de $\vec{R}$ respecto al mismo punto, cuyo módulo vale $R \cdot a$; de aquí: $F_2 \cdot d = R \cdot a$; despejando:

$$a = \frac{F_2 \cdot d}{R}$$

como $R = F_1 + F_2$ (ya que tienen la misma dirección y sentido):

$$a = \frac{F_2 \cdot d}{F_1 + F_2}$$

a es inferior a d. Si hubiésemos tomado momentos respecto a B, sería: $F_1 \cdot d = R \cdot b$; dividiendo esta expresión por la $F_2 \cdot d = R \cdot a$ hallada antes, queda

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}$$

o sea: la resultante dista de las dos fuerzas longitudes que están en razón inversa de sus módulos respectivos. De aquí se deduce una construcción gráfica (fig. 38).

Si las fuerzas paralelas son de sentidos contrarios (fig. 39), tomando momentos respecto a A, el módulo del momento resultante es

$$M = F_2 \cdot d = R \cdot a$$

Como ahora $R = F_2 - F_1$,

$$a = \frac{F_2 \cdot d}{F_2 - F_1}$$

es decir, $a > d$ y a la derecha de $\vec{F}_2$ para que el momento sea positivo como el de $\vec{F}_2$. Operando como antes veríamos que se cumple la proporcionalidad inversa entre las distancias y los módulos. De aquí se deduce una construcción gráfica (véase fig. 39).

Sean los ejes OX, OY de forma que OY sea paralelo a las fuerzas (fig. 40). Las líneas de acción de la $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{R}$ cortan al eje OX en los puntos x_1, x_2, x respectivamente. Se debe verificar que la distancia de la resultante a las fuerzas esté en razón inversa de los módulos; es decir:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{F_2}{F_1}, \quad \text{y de aquí:} \quad x = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}$$

Si hacemos girar a las fuerzas un ángulo de 90°, cortan al eje OY en los puntos y_1, y_2 e y (fig. 40); operando lo mismo que antes obtenemos:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{F_2}{F_1}, \quad \text{y de aquí:} \quad y = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}$$

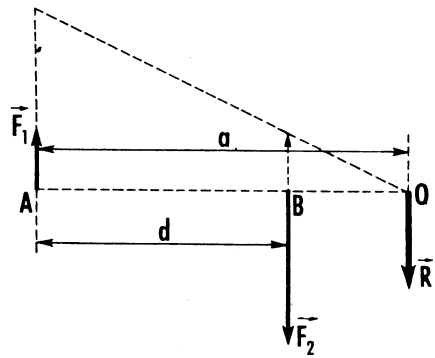


FIG. 39

x e y son las coordenadas del punto de intersección de las líneas de acción de la resultante, según que las fuerzas sean paralelas a uno u otro eje. Este punto C es independiente de la inclinación de las fuerzas respecto a los ejes coordenados, pues siempre

$$\frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$$

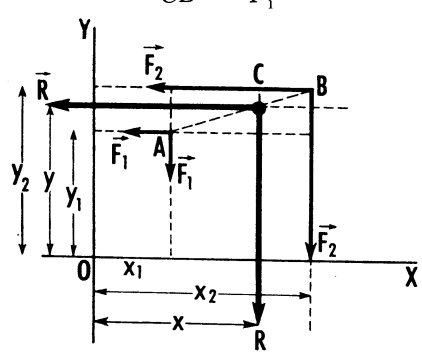


FIG. 40

A este punto C se le llama *centro de fuerzas paralelas* (en general, centro de vectores paralelos).

En el caso general de ser n fuerzas paralelas las coordenadas del *centro*, serían:

$$x = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n}; \qquad y = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \ldots + F_ny_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n}$$

Centro de gravedad. — Todos los puntos de un cuerpo están sometidos a la fuerza de la gravedad. Si consideramos un cuerpo formado por la agrupación de puntos materiales, cada uno de cierta masa m, la fuerza de la gravedad en cada uno de ellos valdrá $m \cdot g$, dirigida hacia el centro de la Tierra, pero dada la distancia a la cual se encuentra dicho centro y las dimensiones del cuerpo, las fuerzas pueden considerarse paralelas. El peso del cuerpo será la resultante de estas fuerzas paralelas.

Al centro de estas fuerzas paralelas se le llama *centro de gravedad* del cuerpo. Es el punto de intersección de las direcciones de los vectores peso, para cualquier posición del cuerpo (fig. 41).

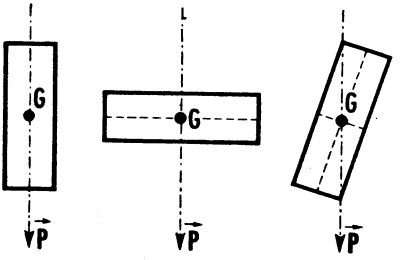


FIG. 41

Supongamos un cuerpo plano (una lámina); para determinar las coordenadas del centro de gravedad, utilizaremos el método anteriormente dado para hallar el centro de fuerzas paralelas. Referimos el cuerpo a un sistema de ejes. Lo descomponemos en partículas cada una de las cuales tiene masa m, y por tanto la fuerza aplicada tiene por módulo mg; las coordenadas del centro de gravedad (c. d. g.) serán:

$$x = \frac{m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3 + \ldots + m_ng}{m_1g + m_2g + m_3g + \ldots + m_ng} =$$

$$= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_1^n m_ix_i}{\sum_1^n m_i}$$

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i}$$

Si es un cuerpo en el espacio serian:

$$x = \frac{\Sigma\, m_i x_i}{\Sigma\, m_i} \qquad y = \frac{\Sigma\, m_i y_i}{\Sigma\, m_i} \qquad z = \frac{\Sigma\, m_i z_i}{\Sigma\, m_i}$$

Si un cuerpo homogéneo posee centro de simetría, el c. d. g. coincide con él, ya que descomponiendo el cuerpo en elementos simétricos la resultante de cada dos fuerzas pasaría por él. El centro de las siguientes figuras es su c. d. g.: cuadrado, rectángulo, círculo, cubo, esfera, cilindro, etc.

Si un cuerpo homogéneo tiene un eje de simetría, el centro de gravedad está sobre dicho eje. Por ejemplo: cono, pirámide regular, una bombilla, una mesa, una persona, etc. Para determinar el c. d. g. de una figura compuesta de varias, de c. d. g. conocidos, se consideran las masas concentradas de sus c. d. g., y aplicamos las fórmulas anteriores. Si las figuras son planas y homogéneas, al aplicar las fórmulas se sustituye masa por superficie.

Para un cuerpo continuo en lugar de Σ debemos utilizar integrales.

Problema: Tenemos un mazo, cuya cabeza es cilíndrica, de masa 460 g y radio 4 cm. El mango, también cilíndrico, de masa $m = 40$ g y longitud 30 cm. Determinar su c. d. g. (fig. 42).

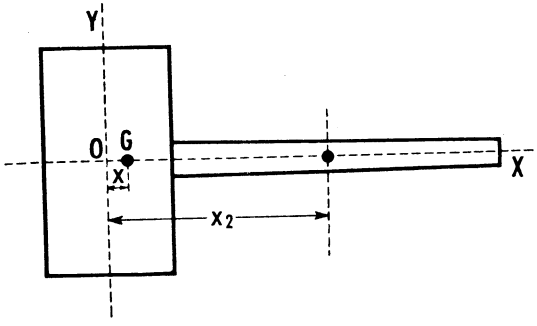


FIG. 42

El c. d. g. de la cabeza está en su centro y el del mango en el suyo, y ambos sobre el eje de simetría. Tomemos los ejes OX OY. Para determinar la posición del c. d. g. (que está sobre el eje de simetría OX) aplicamos la fórmula: $x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$;

como $x_1 = 0$ $\quad x_2 = 15$, $x = \frac{460 \cdot 0 + 40 \cdot 15}{460 + 15} = \frac{40 \cdot 15}{475} = \frac{24}{19}$ cm: $x \simeq 1.26$ cm.

Método experimental. — Para determinar la posición del c. d. g. de un cuerpo plano irregular, podemos utilizar un método experimental, basado en la propiedad citada anteriormente, de que las direcciones del vector peso pasan por el centro de gravedad para cualquier posición del cuerpo. La dirección del vector peso es la vertical y nos viene indicada por la plomada. Tomemos la lámina (cuerpo plano) y la suspendemos de un punto de su contorno, y con la plomada determinamos la dirección del vector peso, que debe pasar por el punto de suspensión para que haya equilibrio. Lo colgamos de distintos puntos del contorno determinando en cada caso la dirección del peso con la plomada. Si hemos dibujado sobre la lámina las direcciones de la plomada en los distintos casos, veremos que se cortan en un punto que será el c. d. g. de la lámina.

APENDICES

1.º LEY DE EQUILIBRIO DE LAS MÁQUINAS SIMPLES

Palanca. — Consiste en una barra rígida con un punto de apoyo con la cual podemos vencer una resistencia aplicando una fuerza (potencia). Pueden ser de tres géneros.

La palanca de primer género tiene el apoyo entre la potencia y la resistencia, estando aquéllas en los extremos. Sean a y b las distancias de la potencia y la resistencia al apoyo llamados brazos de la palanca (fig. 43).

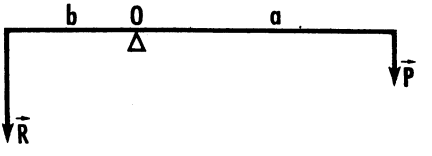


FIG. 43

Aplicando la condición de equilibrio suma de momentos $= 0$ (ya que suma de fuerzas se anula con la reacción del apoyo). $P \cdot a - R \cdot b = 0$ (pues el momento de P respecto al apoyo es de signo contrario al de R).

De aquí se deduce la ley de la palanca ($P \cdot a = R \cdot b$): *Potencia por su brazo igual a resistencia por el suyo.*

En la de segundo género la resistencia está entre el apoyo y la potencia. En la de tercer género, es la potencia la que está entre la resistencia

y el apoyo, que están en los extremos. Para todas las palancas se aplica la misma ley.

Polea fija. — Una rueda colgada de A, que puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro O, con una garganta por donde pasa una

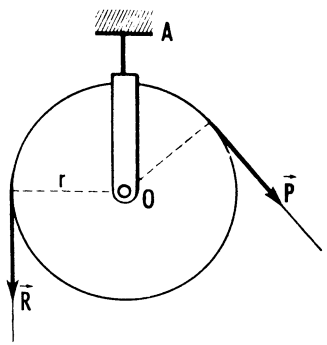


FIG. 44

cuerda (fig. 44). Aplicamos la potencia $\vec{P}$ para vencer la resistencia $\vec{R}$. Sea r el radio de la polea, tomando momentos respecto a O tenemos

$$P \cdot r - R \cdot r = 0, \quad \text{o sea,} \quad P = R.$$

Polea móvil. — La polea está suspendida verticalmente en A (fig. 45) y tiramos de la cuerda verticalmente por el otro extremo con la fuerza $\vec{P}$. Vencemos la resistencia R. Para el equilibrio debe cumplirse:
(siendo P' la reacción ejercida por el apoyo A)

$$P + P - R = 0, \quad P + P' = R$$
$$-P \cdot r + P' \cdot r = 0, \quad P = P'$$

luego,

$$2P = R; \quad P = \frac{R}{2};$$

la potencia es igual a la mitad de la resistencia. Tirando oblicuamente (figura 46) formando la cuerda un ángulo φ con la vertical, tenemos:

Suma de componentes verticales $P' \cos \varphi + P \cos \varphi - R = 0$.
Suma de componentes horizontales $-P' \operatorname{sen} \varphi + P \operatorname{sen} \varphi = 0$;

$$P = P'; \quad 2P \cos \varphi = R; \quad P = \frac{R}{2 \cos \varphi}$$

Si $\varphi = 0$ estamos en el caso anterior.

Torno. — Un cilindro de radio r sobre el que se puede arrollar una cuerda (fig. 47) y puede girar por la acción de una manivela de longitud

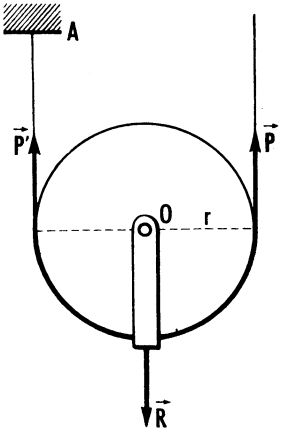


FIG. 45

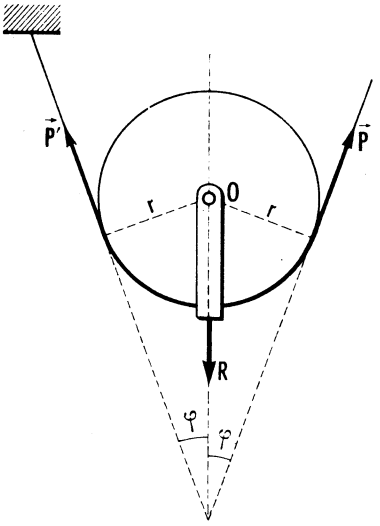


FIG. 46

o brazo r' Al girar el cilindro, la cuerda se arrolla en él y eleva un peso $\vec{R}$, actuando la fuerza necesaria normalmente a la manivela. En este caso tomaremos momentos respecto al eje de giro (el momento respecto a un eje vale producto de fuerza por distancia fuerza-eje); obtenemos:

$$P \cdot r' = Rr; \qquad P = \frac{Rr}{r'}.$$

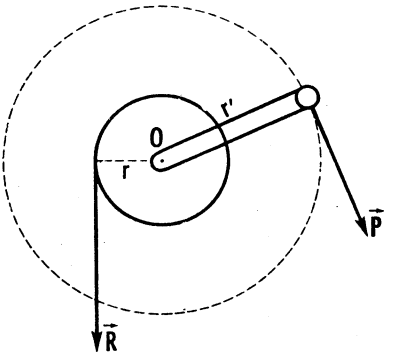


FIG. 47

Plano inclinado. — Un plano forma con la horizontal un ángulo α. Un cuerpo de peso $\vec{R}$ situado en el plano debe equilibrarse con la fuerza $\vec{P}$ dirigida paralelamente al plano y hacia su parte superior (fig. 48) descomponemos la fuerza en sus componentes normal al plano y paralela al

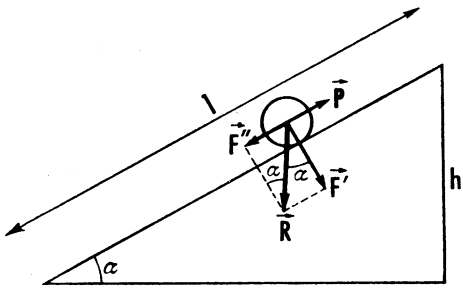


FIG. 48

mismo $\vec{F'}$ y $\vec{F''}$, respectivamente. La componente $\vec{F'}$ se anula por la reacción del plano y la F'' vale $F'' = R$ sen α. Así pues, basta equilibrar la $\vec{F'}$ para mantener el cuerpo en equilibrio; es decir, basta que

$$P = F'' = R \text{ sen } \alpha; \quad P = R\frac{h}{l}.$$

2.° ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA BALANZA

Una balanza es en esencia una palanca de primer género. Vamos a describir una balanza de laboratorio (fig. 49). A la palanca se le llama *cruz;* su apoyo está rigurosamente en el centro (la balanza debe tener los brazos iguales); dicho apoyo consta de una cuchilla de acero o ágata (debe ser material duro), descansando sobre una placa del mismo material, situada en la parte superior de un soporte vertical. Este soporte está sujeto por la parte inferior a una plataforma horizontal, en cuyos extremos lleva unos tornillos para lograr que la citada plataforma esté siempre horizontal y, en consecuencia, el soporte, vertical. La verticalidad del soporte puede constatarse con una pequeña plomada tal que debe coincidir su extremo inferior con un índice cuando el soporte esté vertical. De los extremos de la cruz penden los platillos (en una balanza de precisión se apoyan en la cruz sobre prismas de ágata). Solidario con la cruz, y en su parte central, lleva una larga aguja vertical, llamada *fiel,* que oscila al oscilar la balanza. Su extremo inferior se mueve frente a una escala graduada, describiendo el mismo ángulo que el descrito por el eje de la

cruz de la balanza. La posición del fiel es vertical cuando la balanza está equilibrada; entonces indica el punto medio de la escala.

Si colocamos dos masas, m y m', una en cada platillo de la balanza, si ésta se equilibra debe verificarse la ley de la palanca:

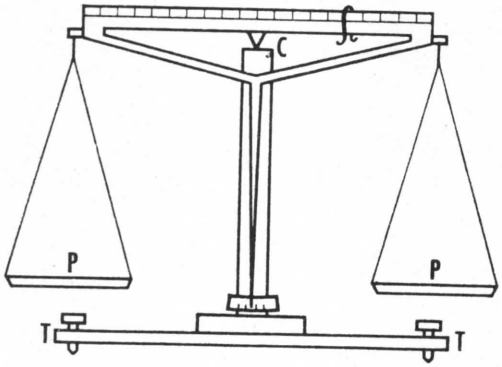


FIG. 49

$$F \cdot l = F' \cdot l'$$

pero

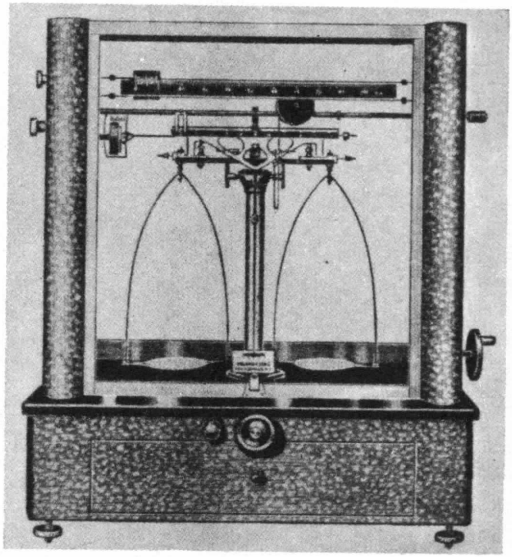
$$F = mg. \qquad F' = m'g$$

luego,

$$m \cdot g \cdot l = m' \cdot g \cdot l'$$

simplificando teniendo en cuenta que en un mismo lugar g es constante y supuestos los brazos iguales, se verifica que $m = m'$; es decir, la balanza nos sirve para comparar masas. Si una de ellas tiene un valor conocido, determinamos el valor de la otra; la balanza es un aparato con el cual determinamos el valor de la masa de un cuerpo.

En una balanza corriente equilibrada, no alteramos el equilibrio añadiendo a uno de los platillos una masa muy pequeña. En cambio, en las balanzas de precisión podemos medir diferencias de masa de 0.1 miligramos.



Balanza de laboratorio

Sensibilidad de una balanza. — En una balanza equilibrada añadimos una sobrecarga en un platillo: la balanza toma una nueva posición de equilibrio que nos será definida por el ángulo que ha girado el fiel. Llamaremos sensibilidad de la balanza al cociente entre el ángulo descrito por el fiel y la sobrecarga; se mide en radianes/gramo, pero es más práctico div./mg. Si la sobrecarga es de 1 miligramo y el ángulo descrito por el fiel corresponde a 3 divisiones de la escala, la sensibilidad sería 3 divisiones/miligramo.

Para determinar la sensibilidad de una balanza consideramos el esquema de la figura 50. La balanza está equilibrada por dos masas iguales de peso P; en el platillo de la derecha colocamos la sobrecarga de peso p. El eje de la cruz y el fiel describen el mismo ángulo. En la posición de equilibrio inicial el c. d. g. de la cruz está en la vertical del apoyo y sobre el eje de simetría de dicha parte móvil. Sea G el c. d. g. citado, que dista la longitud a del apoyo O. (Está más bajo que O para que haya estabilidad.) Al colocar la sobrecarga gira la cruz un ángulo α y el eje de simetría del sistema rígido que constituye la parte móvil, gira el mismo ángulo. El centro de gravedad G' está en aquel eje y a la distancia a de O. La dirección de la fuerza peso de la cruz P_c pasa por G', y para que haya equi-

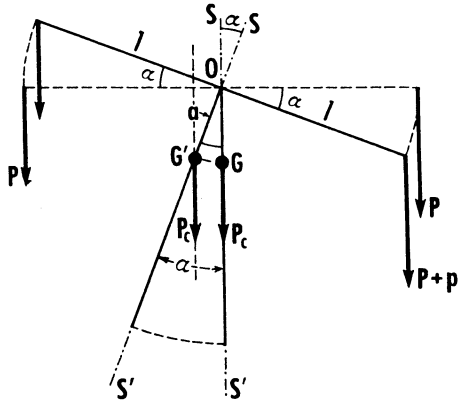


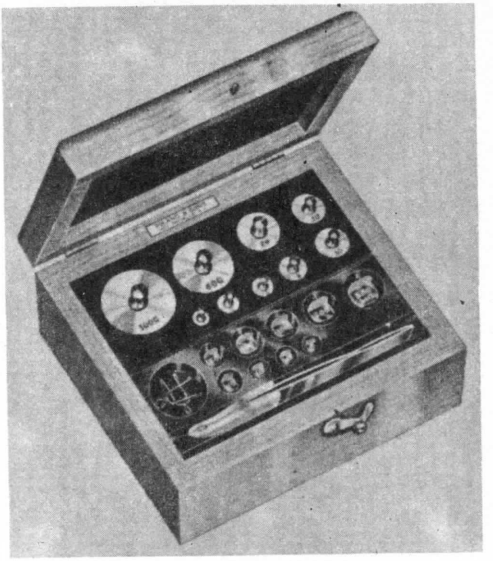
FIG. 50

librio debe ser nulo el momento resultante de las fuerzas que actúan respecto un punto que puede ser el O. El momento resultante respecto O vale:

$$(P + p) \cdot l \cos \alpha - P \cdot l \cos \alpha - P_c \cdot a \operatorname{sen} \alpha = 0$$

ya que debe ser nulo; luego,

$$p \cdot l \cos \alpha = P_c \cdot a \cdot \operatorname{sen} \alpha; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{p \cdot l}{P_c \cdot a} = \frac{ml}{m_c a}$$



Caja de pesas

(siendo m masa de sobrecarga, y m_c la masa de la cruz); si el ángulo es pequeño, sustituimos la tangente por el ángulo α y la sensibilidad $s = \frac{\alpha}{m} = \frac{l}{m_c \cdot a}$ es directamente proporcional a la longitud de los brazos, e inversamente proporcional a la masa de la cruz y a la distancia del centro de gravedad al punto de apoyo O (arista de suspensión).

Podemos aumentar la sensibilidad aumentando la longitud de los brazos, disminuyendo la masa de la cruz o la distancia del c. d. g. a O. El aumentar los brazos tiene los inconvenientes de aumentar la masa de la cruz (y por tanto disminuir la sensibilidad), hacer más fácil su deformación (su longitud no sería la misma) y aumentar el período de oscilación (se pierde rapidez en las pesadas). Podemos disminuir la masa de la cruz de forma que sea compatible con su rigidez. Por esto se le da una forma especial para ofrecer gran resistencia a la flexión. La disminución de la distancia a tiene el inconveniente de aumentar el período de oscilación.

En las balanzas de precisión, los brazos son cortos y algunas llevan un dispositivo para amortiguar la oscilación. Van encerradas en una vitrina con puertas laterales para poner y quitar las pesas. Se mantienen cerradas durante las pesadas.

Para evitar que se desgasten las cuchillas tienen un dispositivo que soporta la cruz cuando no se usa la balanza o cuando colocamos o quitamos las pesas y se maneja desde el exterior.

Para medir masas con la balanza, se comparan con otras de valor conocido, que acostumbran a estar colocadas en una caja llamada *caja de pesas*.

Para las balanzas de laboratorio se usan unas cajas que llevan unas masas metálicas de forma cilíndrica de valores 100, 50, 20, 10, 10, 5, 2, 2, 1 gramos, y otras más pequeñas en forma de placas con un extremo encorvado para cogerlas fácilmente con unas pinzas (que es con lo que deben manejarse las pesas). Sus valores son 50, 20, 10, 10, 5, 2, 1 centigramos. Combinando estas masas, logramos obtener cualquier valor desde 0,01 g, hasta 201 g. Cuando se quiere apreciar el miligramo se utiliza un artificio que se basa en la ley de equilibrio de la palanca. Un peso P a la distancia $\frac{l}{n}$, equilibra a un peso $\frac{P}{n}$ a la distancia l. Una regla solidaria de la cruz está graduada de cero a diez, a partir del apoyo, por cada lado, y cada división subdividida en diez partes; un hilo metálico doblado llamado *reiter*, situado en el extremo de la escala, equilibra una masa de 1 centigramo colocado en el platillo del otro extremo. Si lo colocamos en la división 1, equilibra a 0,1 centigramos, es decir, al miligramo, y colocado en la primera junto a 0, que es la décima de la división 1, equilibra a una décima de miligramo. Existen balanzas (microbalanzas) que pueden apreciar la milésima de miligramo (gamma). En las balanzas de precisión, el reiter se maneja desde el exterior, con un dispositivo especial.

Si tenemos que hallar la masa de un cuerpo con una balanza, debemos comprobar el cero, la exactitud, sensibilidad y fidelidad de esta balanza (véase Prácticas). Se comprueba también el valor indicado en las pesas.

Si una balanza con la que tenemos que determinar cierta masa no es exacta, por tener los brazos desiguales, podemos utilizar distintos métodos para evitar el error.

Método de doble pesada. — Se coloca el cuerpo en un platillo y se equilibra con pesas en el otro. Se quitan las pesas y se coloca el cuerpo en este platillo, equilibrando de nuevo la balanza. En cada caso obtenemos equilibrio, luego debe cumplirse (llamando m a la masa del cuerpo, m_1 a la de las pesas en el primer caso, y m_2 en el segundo, siendo l y l' los brazos):

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot l = m_1 \cdot l' \\ m_2 \cdot l = m \cdot l' \end{array}\right\} \quad \frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m}; \qquad m^2 = m_1 m_2; \qquad m = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$$

La masa del cuerpo es igual a la media geométrica de las masas de las pesas que la equilibran en los dos casos. Si las dos pesadas difieren poco, puede sustituirse la media geométrica por la media aritmética, y entonces

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2}.$$

Método de sustitución o de carga constante. — Se coloca el cuerpo en el platillo derecho y una tara en el izquierdo (puede ser perdigones, una pesa), de forma que la masa de esta tara sea algo mayor que la del cuerpo. Se equilibra colocando las pesas necesarias, cuyo valor total es m_1, en el

platillo donde está el cuerpo. Se retira el cuerpo y equilibramos de nuevo con pesas. Sea m_2 la masa de las pesas que hay en el platillo. La masa del cuerpo será:

$$m = m_2 - m_1$$

3.º CUALIDADES DE LOS APARATOS DE MEDIDA

Exactitud. — *Es la coincidencia del valor obtenido en la medida de la magnitud con el valor real de la misma.* Es muy difícil que una medida sea rigurosamente exacta. Debido principalmente a las deficiencias de los aparatos de medida, al observador y a las condiciones en que se efectúa la medida.

Sensibilidad. — *Es la cualidad de poder apreciar pequeñas variaciones (diferencias) en la magnitud a medir.* Ejemplo: un termómetro ordinario nos permite apreciar una temperatura en grados y medios grados, pero no se puede apreciar décimas de grado. Un termómetro clínico, más sensible, permite apreciar décimas de grado. En el caso de la balanza hemos determinado teóricamente su sensibilidad para hacer su estudio y discutir los resultados. Puede hacerse experimentalmente (véase Prácticas).

Precisión. — *Es el grado de aproximación de la medida dada por el aparato al valor real de la magnitud.* Un aparato sensible no le presupone preciso; en el ejemplo del termómetro anterior, el clínico es más sensible, pero podría resultar mal graduado o con algún defecto en el capilar y ser menos preciso que el menos sensible.

Fidelidad. — *Es la reiteración del valor obtenido en las medidas efectuadas de una misma magnitud.* Por ejemplo, pesamos un objeto y obtenemos un cierto valor, quitamos el objeto y luego lo volvemos a pesar, y así repetidas veces; si la balanza es fiel, obtendremos siempre el mismo valor.

4.º ERRORES EN LAS MEDIDAS

Se llama *error absoluto* de una medida a la diferencia entre el valor exacto y el que hemos obtenido. Puede ser por exceso o por defecto, según que el valor obtenido sea mayor o menor que el verdadero. Si en una balanza ordinaria colocamos en un platillo la masa de 1 kilogramo y la equilibramos con unas masas cuya suma es de 0,97 kg, el error absoluto es 0,03 kg por defecto. En general, el valor exacto no lo conocemos, y por tanto no sabemos el error cometido, pero podemos tener idea del orden de magnitud o de su máximo valor al conocer la precisión del aparato de medida. Supongamos un reloj que en un día adelanta 4 minutos; en una hora adelanta $\frac{4}{24}$ minutos $= \frac{1}{6}$ minutos $= 10$ segundos. El error absoluto cometido en la medida de un intervalo de tiempo de una hora es 10 seg.

El *error relativo* es el cociente entre el error absoluto y el valor obtenido en la medida. En el caso anterior, el error relativo es:

$$\frac{10}{3600} = \frac{1}{360}$$

(error absoluto: 10 seg.; tiempo medido: 3600 seg. = 1 hora).

El error absoluto en un día sería 4 minutos (depende del tiempo medido); el relativo:

$$\frac{4}{24 \cdot 60} = \frac{1}{360}$$

es el mismo que para cada hora. El error relativo se acostumbra a dar en tantos por ciento o por mil; en este caso es del 0,277 %. Generalmente se utiliza el error relativo de las medidas, pues nos proporciona una idea más exacta de la precisión.

Al medir magnitudes con aparatos que no son generalmente perfectos, cometemos errores que pueden ser *accidentales* o *sistemáticos*. Los errores accidentales nos dan medidas distintas para una misma magnitud. Si repetimos las lecturas y tomamos el promedio, el error cometido es mucho menor. Esto se debe a que generalmente el error será unas veces por exceso y otras por defecto; siendo estos errores de signo contrario, en el promedio de muchas lecturas es probable que el error total sea mucho menor. Debe excluirse siempre una medida que difiera mucho de las otras.

Los errores sistemáticos son del mismo sentido, siempre por exceso o siempre por defecto, debidos por lo general a un defecto constante del aparato. Estos errores no pueden eliminarse con la media aritmética. En este caso podemos repetir la medida con otro aparato, ya que no es probable que los dos tengan el mismo defecto, que nos dé los errores del mismo signo. Una balanza que tuviese los brazos desiguales nos daría un error sistemático. Pesando con otras balanzas y tomando el promedio de los valores obtenidos lograríamos aminorar el error.

El reloj del ejemplo anterior nos daría un error sistemático.

Otro tipo de error es el personal, debido al observador. Uno muy corriente es el error de paralaje, que es muy notable al observar oblicuamente un tubo barométrico, o la aguja indicadora de un amperímetro.

Al efectuar repetidas mediciones de una misma magnitud, para evitar errores accidentales, aumentando el número de medidas aumentamos la probabilidad de que la media aritmética sea el valor verdadero de la magnitud medida. Para conocer el error de la media aritmética se utiliza una fórmula que nos da el *error cuadrático medio*. Sean x_1, x_2, ..., x_n las medidas, x_m la media aritmética de ellas, n el número de mediciones. El error cuadrático medio es:

$$\epsilon_c = \sqrt{\frac{(x_m - x_1)^2 + (x_m - x_2)^2 + \ldots + (x_m - x_n)^2}{n(n-1)}}$$

Como no sabemos el sentido del error, podemos escribir que el valor de la medida es $= x_m \pm \bar{e}_c$.

Acotación de errores. — Antes hemos dicho que era difícil saber el error absoluto, debido a la dificultad de conocer el valor exacto. Se puede dar un límite del error; es decir, podemos acotar el error y dar un valor máximo del valor absoluto del error. Supongamos un termómetro cuyas divisiones indican grados centígrados. Con él queremos determinar una temperatura; cuando la columna de mercurio está entre 18° C y 19° C, el error absoluto máximo en la lectura es de 1° C; pero si podemos distinguir claramente si la columna está entre las dos lecturas citadas, antes o después de media división, el error máximo es de medio grado.

Sucede generalmente que una magnitud no la podemos medir directamente y obtenemos su valor por cálculo, midiendo otras magnitudes relacionadas con aquélla, por una fórmula. Los valores obtenidos en las medidas pueden estar afectados de error, y por consiguiente obtendremos el valor de la magnitud que se busca con cierto error.

Si la magnitud buscada es el resultado de la suma algebraica de otras medidas cuyo error máximo conocemos: el error absoluto máximo de la suma algebraica de los valores de varias magnitudes, cuyos errores máximos son conocidos, es igual a la suma de estos errores máximos.

Cuando el valor de la magnitud es el resultado de un producto o cociente, se utiliza el error relativo máximo (que es el absoluto máximo dividido por el valor de la medida). El error relativo máximo que se puede cometer en el producto o cociente es igual a la suma de los errores relativos máximos de cada uno de los términos.

El error relativo máximo de una potencia es igual al producto del exponente por el relativo máximo de la base. En una raíz es el cociente entre el error relativo máximo de la cantidad subradical y el índice de la raíz.

Ejemplo: Supongamos que nos interesa conocer la aceleración normal de un punto que describe un movimiento circular con velocidad constante. Utilizaremos la fórmula $a_n = \omega^2 \cdot R$.

Medimos el radio, con una regla dividida en centímetros y subdividida para que se puedan apreciar los milímetros. Con un poco de cuidado en las medidas, podemos lograr un error inferior a 0,5 milímetros. El valor de la longitud del radio resulta ser 40 cm. El error relativo máximo es $0{,}05/40 = 0{,}00125$.

Para hallar ω, determinamos el período, con un cronómetro que aprecia la centésima de segundo. Determinamos varias veces el tiempo que tarda en dar una vuelta, observamos que es 50 s, y que las medidas discrepan en menos de una décima de segundo. El período medido es 50 s con un error menor de 0,1 s.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Tomando $\pi = 3{,}1416$ el error absoluto es inferior a 0,000008.

El error relativo máximo de T es $\frac{0,1}{50}$.

El error relativo máximo de $\pi = \frac{0,000008}{3,1416}$ que podemos despreciar frente al anterior.

El error relativo máximo, con el que determinamos ω es 0,002.

El error relativo máximo en la determinación de a_n es la suma del doble del error relativo máximo de ω más el del radio, o sea: $2 \cdot 0,002 + 0,00125 = 0,00525$.

Vamos a calcular a_n:

$$a_n = \left(\frac{2\pi}{50}\right)^2 \cdot 40 = 0,6316...$$

el error absoluto máximo es $0,6316 \cdot 0,00525 = 0,0033...$, lo cual nos indica que no podemos dar a_n con más cifras que las dos primeras, pues el error absoluto afecta a las milésimas.

Cuando el valor de la magnitud hallada está afectado de cierto error no podemos dar dicho valor con más cifras decimales que las exactas. Es decir, hay que suprimir las cifras decimales tales que el error cometido al despreciarlas sea inferior al error máximo calculado. En el ejemplo anterior $(0,631 \pm 0,003)$ cm/s² sólo tiene dos cifras exactas.

Así pues, el valor de la aceleración normal es $a_n = 0,63$ cm/s², con un error del 0,5 %.

También se puede escribir: $a_n = (0,63 \pm 0,003)$ cm/s².

PRÁCTICAS

Graduación de un dinamómetro. — Colgamos el dinamómetro por una anilla que tiene en un extremo (fig. 51). Del otro extremo suspendemos un platillo como el de una balanza. Adosamos una escala graduada, de forma que la división que el índice señala la tomaremos como cero. Colocamos en el platillo pesas conocidas y vamos leyendo la división señalada por el índice en cada caso. Por ejemplo: Colocamos ½ kg y señala la división 2. Colocamos 1 kg y señala la división 4, con 2 kg la 8, etc. De esta forma podemos graduar el dinamómetro. Podemos subdividir las graduaciones obtenidas y poder apreciar fracciones de las fuerzas que han servido para calibrar. Hay que tener cuidado con el error de paralaje. Observaremos normalmente a la regla.

Experiencia de composición de fuerzas utilizando dinamómetros. — Colgamos dos dinamómetros, en cada uno de los vértices superiores de una pizarra. Unimos los extremos inferiores de los dinamómetros, con un hilo fino y resistente, de longitud mayor que la distancia entre dinamómetros. Colgamos de un punto O del hilo un peso P (fig. 52) conocido (o lo medimos con un tercer dinamómetro). En los dinamómetros, leemos los valores de las fuerzas F_1 y F_2,

dibujamos sobre la pizarra la línea *AOB* y medimos el ángulo *AOB* con un transportador circular (si tiene nonius circular, mejor). Con estos datos, podemos comprobar el valor de *P* aplicando el teorema del coseno, o por construcción gráfica, que sería más rápido. Podemos variar la posición del punto *O*, donde

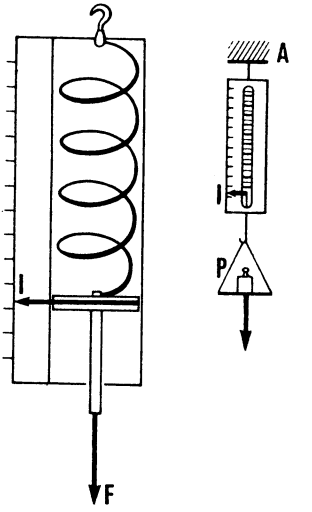


FIG. 51

colgamos el peso *P*, y comprobar en cada caso las reglas dadas para componer fuerzas.

Si queremos comprobar la composición de varias fuerzas uniremos a *O* tantos hilos como fuerzas, colocando un dinamómetro en un extremo de cada hilo. Colocando un peso *P*, o un hilo con un dinamómetro y tirando de él, los dinamómetros nos indicarán los módulos de las fuerzas y la dirección de los hilos, las direcciones de las fuerzas (el sentido es tal que resulte tracción en los dina-

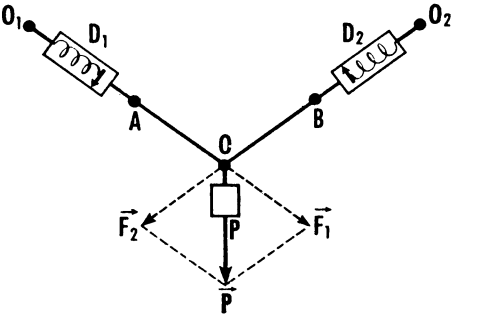


FIG. 52

mómetros). Componiendo las fuerzas, por la regla del polígono, obtendremos la resultante.

Para fuerzas paralelas, colocamos dos dinamómetros en los extremos de una regla graduada y los colgamos de su parte superior. Tomando un peso P, con un gancho, de forma que se pueda suspender en la regla en una posición conocida, leyendo las indicaciones F_1 y F_2 de los dinamómetros, veremos que su suma es igual al peso y que el producto de cada indicación, por la distancia del punto de suspensión del correspondiente dinamómetro, al punto donde está colgado el peso, nos da el mismo valor (fig. 53) $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$.

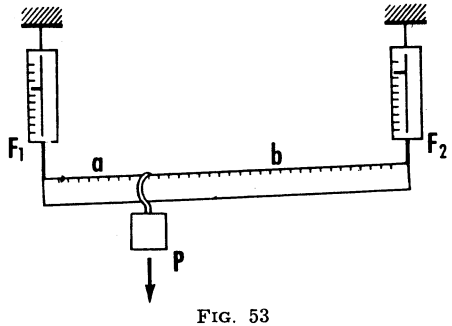


FIG. 53

Comprobación de las leyes de equilibrio de máquinas simples. — Para comprobar la ley de la palanca, tomaremos una regla graduada y la apoyaremos sobre un prisma triangular, de forma que la arista del prisma, coincida con una división determinada. Colgando dos pesas de esta regla lograremos el equilibrio en una cierta posición. Multiplicando el valor de una pesa por su distancia al apoyo, obtenemos un valor igual al producto de la otra, por su respectiva distancia al apoyo.

Para comprobar la ley de la polea fija, colgaremos dos pesos iguales, en los extremos de la cuerda y comprobaremos el equilibrio. Si la polea es móvil colocaremos un dinamómetro en el extremo libre de la cuerda, al colgar un peso en la polea móvil, el dinamómetro, en la posición de equilibrio, nos indicará una fuerza mitad del peso colgado.

Para el torno tomamos un cordel y lo arrollamos en un cilindro, sujetando en él un extremo, colgaremos un peso R del otro y colocando el brazo de la manivela horizontal colgaremos pesas hasta lograr equilibrio. En este caso debe cumplirse que $R \cdot r = P \cdot r'$ siendo P el valor de las pesas colocadas para equilibrar.

Un plano inclinado sencillo no es más que una tabla con un extremo a nivel más alto que el otro. Colocamos una pequeña polea fija en la parte superior. Atamos un cordel a un cuerpo, que lo ponemos sobre la tabla, y este cordel, después de pasar por la polea, cuelga verticalmente por acción de pesas, que podemos variar a voluntad. Sea R el peso del cuerpo, P las pesas que logran equilibrio, h el desnivel de los extremos del plano y l su longitud, debe verificarse que $P = \frac{h}{l} \cdot R$ (el cuerpo y la tabla deben ser bien lisos para evitar rozamientos).

Estudio experimental de las características de una balanza

DETERMINACIÓN DEL CERO. — En general, el cero de la balanza no está en la posición media de la escala, además para una balanza de precisión no amortiguada, siendo el rozamiento pequeño, estaría oscilando mucho tiempo sin pararse y durarían mucho las pesadas. Para determinar el cero, se leen las divisiones a izquierda y a la derecha del punto medio de la escala, para cierto número de oscilaciones sucesivas y tomamos el promedio. Siempre deben hacerse un número impar de lecturas por un lado y una menos por el otro, por ejemplo tres a la izquierda y dos a la derecha. Se suman el promedio de las lecturas de la izquierda, con el de las de la derecha y se divide por dos. Si el cero es central las lecturas de la derecha y las de la izquierda son de signos contrarios.

Ejemplos: Supongamos el cero central y que en las sucesivas oscilaciones, las lecturas a la izquierda son 7, 5 y 3 y las de la derecha 6 y 2

$$-\frac{7+5+3}{3}=-5\,; \qquad \frac{6+2}{2}=4\,; \qquad \frac{-5+4}{2}=-0{,}5$$

al cero está en —0,5; es decir, media división a la izquierda del cero de la escala.

EXACTITUD. — Coloquemos dos pesas iguales, una en cada platillo, si la balanza se equilibra, es exacta. (Un estudio de la exactitud sería muy delicado.) Si al equilibrar, los pesos no son iguales, o sea P y P' se verifica entonces $P\cdot l = P'l'$; $\frac{P}{P}=\frac{l}{l}$; $\frac{P-P'}{P}=\frac{l-l'}{l}$. Es decir, un error relativo en los brazos, se traduce en el mismo error relativo, para la pesada efectuada.

SENSIBILIDAD. Estando la balanza descargada determinamos el cero. Añadimos a uno de los platillos, un miligramo y volvemos a determinar el cero (el equilibrio). La diferencia entre las divisiones de la escala correspondientes a las dos determinaciones nos da la sensibilidad. Supongamos que el cero de la balanza descargada coincide con la división 2 y con la sobrecarga coincide con la 5 (ambas a un mismo lado), la sensibilidad es 3 div./mg. Si el cero hubiese estado en lados distintos del punto medio de la escala, la sensibilidad sería 7 div./mg. Podemos determinar la sensibilidad para distintas cargas, es decir, estando la balanza equilibrada con dos masas iguales, le añadimos la sobrecarga de 1 mg en un platillo y determinamos la sensibilidad como antes. Los valores de la sensibilidad no son los mismos según la balanza esté cargada o no. Si lo hacemos para varios valores de las cargas, podremos obtener la sensibilidad en función de la carga y podemos dibujar la *curva de sensibilidad*, tomando en abscisas las cargas y en ordenadas las correspondientes sensibilidades.

FIDELIDAD. Tomemos un cuerpo y lo pesamos, obteniendo un cierto valor. Retiramos el cuerpo y lo volvemos a colocar en el mismo platillo y equilibramos de nuevo. Obtenemos un valor, que puede ser el mismo que antes, o no. Si repetimos la operación varias veces y obtenemos siempre el mismo valor constatamos la fidelidad de la balanza.

CUESTIONES

1. *Cítense ejemplos en los cuales se ponga de manifiesto el caracter vectorial de una fuerza y que su representación es un vector deslizante.*

2. *Poner ejemplos de pares de fuerzas.*

3. *Cuando un ciclista gira el manillar ¿qué tipo de sistema de fuerzas aplica?; ¿a qué equivalen?*

4. *¿En qué casos el momento resultante de un sistema de fuerzas es igual al momento de la resultante respecto al mismo punto?*

5. *¿Podemos equilibrar un par de fuerzas con una fuerza? Con dos fuerzas iguales ¿en qué condiciones lo equilibramos?*

6. *¿Podemos equilibrar una fuerza con un par?*

7. *Un sistema de fuerzas concurrentes ¿puede equilibrarse con un par?*

8. *¿En qué condiciones un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo puede equilibrarse con un par?*

9. *Tres niños tiran de tres vértices consecutivos de una placa rectangular, c lo largo de las diagonales correspondientes, con fuerzas iguales ¿hay equilibrio? ¿Y si fuesen 4, uno en cada vértice, tirando con igual fuerza?*

10. *¿Por qué un cuerpo colgado en un punto situado en la vertical de su centro de gravedad está en equilibrio?*

11. *Ley de equilibrio de una máquina compuesta de polea móvil y torno.*

12. *Al pesar un cuerpo con una balanza obtenemos valores distintos según lo coloquemos en uno u otro platillo. ¿Cuál de los brazos es el mayor?*

13. *¿Puede ser exacta una balanza poco sensible?*

14. *¿Puede tener una pesada simple mucha precisión?*

15. *¿Aumentaríamos la sensibilidad de una balanza observando el movimiento del fiel con una lupa? ¿Y la precisión?*

PROBLEMAS

1. Sobre un punto, actúan dos fuerzas de 80 y 60 kp que forman un ángulo de 90° Determinar su resultante.

2. El mismo problema si el ángulo es de 45°.

3. Dos fuerzas iguales en módulo, concurren en un punto. Una de ellas gira alrededor del punto. Determinar gráficamente la resultante cuando el ángulo que forman sea de: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 135°, 180° y 270°.

4. Sobre un punto actúan 4 fuerzas de módulos 40, 50, 30 y 20 kp. Los ángulos que forman cada una de ellas con la primera son, respectivamente, 30°, 60° y 90°. Hallar la resultante, utilizando el método de las componentes sobre dos ejes (pueden ser uno coincidente con la dirección primera, y otro perpendicular que coincide con la dirección de la última).

5. Para sujetar una barca que se halla en un río, se utilizan dos cuerdas, que forman 60° con la dirección de la corriente. Un hombre en cada orilla sujeta el cabo con una fuerza de 20 kp. Determinar la fuerza de la corriente sobre la barca.

6. Una lámpara de 10 kp cuelga de un hilo. Se le aplica una fuerza horizontal de 17,3 kp. Hallar la posición de equilibrio dada por el ángulo que forma con la vertical.

7. En una barra homogénea rígida de 10 m de longitud, apoyada en su punto medio, colgamos los pesos 2, 6 y 8 kp, distantes, respectivamente, 1, 2 y 4 m de uno de los extremos. Determinar la fuerza que aplicada en el otro extremo equilibra el sistema. ¿Influye el peso de la barra?

8. El mismo problema anterior con el apoyo a 4 m del extremo donde actúa la fuerza incógnita; peso de la barra: 2 kp por metro de longitud.

9. Dos hombres sustentan una barra rígida, de peso despreciable, que lleva colgado de uno de sus extremos un peso de 100 kp. Los hombres sujetan la barra en dos puntos que distan 0,50 m y 1 m, respectivamente, del extremo donde cuelga el peso. Determinar las fuerzas, en módulo y sentido, ejercidas por los hombres para mantener el equilibrio.

10. Dos fuerzas paralelas iguales en módulo y de sentidos contrarios distan 2 m, siendo el valor de las fuerzas 20 kp. Hallar dos fuerzas que, distantes 1 m, determinen un sistema equivalente al anterior.

11. Dos hombres tiran de una tabla cuadrada de 1 m de lado a lo largo de una diagonal, con fuerzas iguales a 50 kp. Uno de ellos quiere tirar del vértice contiguo, en dirección paralela a la anterior. ¿Cuál es el momento del par, que haya que aplicar, para restablecer el equilibrio?

12. La relación de masas Tierra-Luna es de 81. Hallar la posición del centro de gravedad del sistema en función de la distancia d de sus centros.

13. A una varilla de 100 g y 20 cm de longitud se le adhiere en un extremo un cubo homogéneo de 4 cm de arista por una de sus caras. ¿Cuál debe ser la densidad de la sustancia que forma el cubo para que el c. d. g. del conjunto esté en la superficie de unión? (El cubo está colocado de tal forma que el eje de simetría de la varilla pasa por su centro.)

14. Un ciclista aplica al manillar un par de momento 10 kp·m; si la longitud del manillar es de 50 cm determinar el valor de las fuerzas aplicadas en su extremo.

15. Con un torno de radio 10 cm y brazo de manivela 60 cm se eleva un cuerpo que pesa 500 kp por un plano inclinado 30° perfectamente liso. ¿Cuál es la mínima fuerza necesaria?

16. La sensibilidad de una balanza es de $\frac{\pi}{50}$ radianes/mg, sabiendo que el ángulo descrito por el fiel, al recorrer su extremo 10 divisiones es de 18°. Hallar la sensibilidad en divisiones/mg.

CAPÍTULO IV

DINÁMICA

Definición. — Es la parte de la Mecánica que estudia los movimientos teniendo en cuenta las causas que los producen. La causa que produce o modifica un movimiento es la fuerza. Si un cuerpo está en reposo y lo empujamos (le aplicamos una fuerza), el cuerpo se mueve; si cesamos en la aplicación de la fuerza, el cuerpo se mueve aún cierto tiempo hasta que se para; es frenado por las fuerzas de rozamiento, sin las cuales el movimiento continuaría indefinidamente.

Principios de la dinámica. — Pueden considerarse resumidos por los tres axiomas de Newton, que son:

1.º *Todo cuerpo persiste en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme si no interviene una fuerza que lo modifique.*

2.º *La aceleración adquirida por el cuerpo es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él y en la misma dirección que la de la línea de acción de la fuerza.*

3.º *A toda acción corresponde una reacción igual y contraria, o bien las acciones mutuas entre dos cuerpos son iguales en magnitud y dirección, pero de sentidos contrarios.*

Principio de la inercia. — El primer axioma de Newton recibe el nombre de principio de la inercia, conocido por Galileo antes de enunciarlo Newton. El que un cuerpo persista en reposo si no se le aplica ninguna fuerza es un hecho evidente y observado constantemente. Una silla, mesa o vehículo en reposo permanecen en su estado de reposo si no se les aplica esfuerzo alguno. El hecho de persistir en movimiento un cuerpo al no aplicarle ninguna fuerza no es tan evidente, pues existen las fuerzas de rozamiento que se oponen a cualquier movimiento y a la larga detendrían al móvil. Si pudiésemos eliminar tales fuerzas de rozamiento, podríamos comprobar el primer axioma con perfecta evidencia. Fue Galileo quien experimentó con cuerpos en movimiento sobre superficies planas. Comprobó que si las superficies de frotamiento del cuerpo con el plano eran lisas, el estado de movimiento tenía mayor duración que para superficies no pulimentadas. Constató que el movimiento cesaba por la acción de las fuerzas de rozamiento al oponerse a él.

Al arrancar un vehículo en reposo, la fuerza de tracción debida al motor tiene que vencer la inercia del vehículo.

Principio de la proporcionalidad entre fuerzas y aceleraciones. — Según el segundo axioma de Newton, si aplicamos una fuerza a un cuerpo, éste adquiere una aceleración proporcional a la fuerza y en la misma dirección. Siendo de la misma dirección, podemos considerar la proporcionalidad de los módulos. A un cuerpo le aplicamos la fuerza F_1 y adquiere la aceleración a_1; si le aplicamos la fuerza F_2 adquiere la aceleración a_2, de forma que se debe verificar

$$\frac{a_1}{F_1} = \frac{a_2}{F_2} = \ldots = \text{constante}$$

lo cual podemos escribir

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \text{constante} = m$$

Para otro cuerpo, aplicando las mismas fuerzas, las aceleraciones serían a_1', a_2', ..., de forma que

$$\frac{F_1}{a_1'} = \frac{F_2}{a_2'} = \ldots = m'$$

distinta de m, lo cual indica que esta constante es característica del cuerpo o de la inercia del cuerpo, por esto se llama *masa inerte* o *masa* del cuerpo. Si la fuerza aplicada es nula, no hay aceleración; primer principio.

En el caso de que el cuerpo esté en las proximidades de la superficie terrestre, sabemos que está sometido a la fuerza de la gravedad. Adquiere una aceleración g, que en el vacío es la misma para todos los cuerpos en un mismo lugar. La relación entre la fuerza peso P y la aceleración de la gravedad g es la masa pesante del cuerpo, que coincide con la de inercia. Por esto a la relación entre fuerza y aceleración en los dos casos le llamaremos masa del cuerpo. En un mismo lugar se verifica

$$\left.\begin{aligned} P &= m \cdot g \\ P' &= m' \cdot g \end{aligned}\right\} \frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}$$

En un mismo lugar de la Tierra, la relación de pesos es igual a la relación de masas (esto lo habíamos utilizado al estudiar la balanza).

Si sobre un mismo cuerpo actúan varias fuerzas concurrentes, determinaremos la resultante $\vec{F}$ de todas las fuerzas, y la ecuación de movimiento se escribe $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Principio de la acción y la reacción. — El tercer axioma de Newton constituye el principio de la acción y la reacción. Si ejercemos una fuerza a una pared, ésta ejerce sobre nosotros una reacción igual en módulo y

dirección, pero de sentido contrario. Una viga apoyada ejerce una acción sobre los apoyos, y éstos una reacción sobre la viga. Dos cargas eléctricas que se atraen, la acción de la primera sobre la segunda es igual en módulo y dirección, pero de sentido contrario a la de la segunda sobre la primera.

Fuerzas de inercia. — Podemos escribir la ecuación $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ en la forma $\vec{F} - m\vec{a} = 0$. Si llamamos $\vec{f}$ a $-m \cdot \vec{a}$, la ecuación es $\vec{F} + \vec{f} = 0$. Como $\vec{F}$ y $\vec{f}$ tienen la misma dirección, esta igualdad expresa la condición de equilibrio entre las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{f}$. A este equilibrio se le llama *equilibrio dinámico*, y a la fuerza $\vec{f}$, *fuerza de inercia*, y aparece siempre que existe una aceleración. Si un cuerpo está en reposo y le aplicamos una fuerza $\vec{F}$, el cuerpo adquiere una aceleración $\vec{a}$; siendo su masa m, aparece una fuerza de inercia $\vec{f} = -m \cdot \vec{a}$.

Si colgamos un cuerpo en la parte superior de un ascensor, intercalando un dinamómetro, con el ascensor parado el dinamómetro señala el peso del cuerpo. Si el ascensor asciende con la aceleración a, el dinamómetro señala el peso del cuerpo más la fuerza de inercia, pues como la aceleración es hacia arriba, la fuerza de inercia es hacia abajo, y por tanto del mismo sentido que el peso. Si el ascensor desciende, la fuerza de inercia es hacia arriba, por tanto se opone al peso. El dinamómetro indicará la diferencia entre el peso y la fuerza de inercia. Si el ascensor cayese con la aceleración de la gravedad, el dinamómetro no señalaría fuerza, ya que la de inercia sería opuesta al peso $= -m \cdot g$. Supongamos que no existiese la fuerza de la gravedad. Una persona en un ascensor que asciende con la aceleración g tendría la sensación de la existencia de la fuerza de la gravedad, pues ejercería una fuerza sobre la parte inferior del ascensor igual a $m \cdot g$. Si soltase un cuerpo, caería con la aceleración g. Ejemplo: un cohete va de la Tierra a la Luna; en un lugar en que la gravedad resultante fuese nula, al acelerar o al frenar nos parecería que existe fuerza de gravedad hacia la Tierra o hacia la Luna, respectivamente.

Un ejemplo típico de fuerza de inercia lo constituye la *fuerza centrífuga*. Consideremos una bola de plomo sujeta a un hilo. Si la hacemos girar rápidamente, vemos que el hilo se tensa (aparece una fuerza). Si el hilo se rompe, la bola continúa con velocidad tangente a la trayectoria en el punto ocupado al romperse el hilo y desaparece la tensión del hilo, y por tanto la fuerza. La aceleración de este movimiento, si es de rotación uniforme, coincide con la componente normal de la aceleración $a = a_n = \omega^2 r$. La fuerza de inercia correspondiente vale $-ma = -m\omega^2 r$ de sentido contrario al de la aceleración. Como esta aceleración estaba dirigida, según el radio, hacia el centro, la fuerza de inercia será de la misma dirección, pero de sentido contrario; es decir, hacia fuera. A esta fuerza

se le llama *fuerza centrífuga.* Se manifiesta en multitud de experiencias y en muchos movimientos: coche que describe una curva, centrifugador de laboratorio, escenas circenses, regulador de Watt, etc.

Dinámica de los movimientos. — UNIFORME. Si un móvil tiene movimiento rectilíneo uniforme, su aceleracióón es nula, y por tanto la fuerza o la resultante de las fuerzas que actúan sobre él son nulas. Si una fuerza actúa un tiempo muy corto (fuerza instantánea) sobre un cuerpo, el movimiento será uniforme en el instante de cesar la fuerza. Ejemplo: un proyectil a la salida del cañón.

Si lanzamos por un plano inclinado un cuerpo y las fuerzas de rozamiento igualan a la componente del peso en la dirección del plano, el cuerpo desciende con movimiento uniforme.

UNIFORMEMENTE ACELERADO. Una fuerza constante (en módulo, dirección y sentido) produce movimiento uniformemente acelerado. La aceleración, de la misma dirección y sentido que la fuerza, tiene por módulo

$$a = \frac{F}{m}.$$

Las ecuaciones del movimiento son las mismas que las dadas en cinemática, sustituyendo a por $\frac{F}{m}$.

Si la fuerza actúa en sentido contrario a la velocidad de un móvil, le produce un movimiento uniformemente retardado, de deceleración igual a $\frac{F}{m}$.

CIRCULAR. — Un móvil que describe un movimiento circular uniforme tiene aceleración normal, y por tanto está sometido a una fuerza

$$F = m \cdot a_n = m\omega^2 R$$

llamada fuerza centrípeta y a la fuerza de inercia (citada anteriormente) llamada fuerza centrífuga. Son del mismo módulo y dirección, pero de sentidos contrarios. Por ser constante la velocidad, son ellas constantes.

Si un móvil recorre una circunferencia con aceleración angular α constante, está sometido a las siguientes fuerzas: una tangencial de módulo $ma = mR\alpha$, constante, y a las fuerzas centrípeta y centrífuga de módulos $m\omega^2 R = m(\omega_0 + \alpha t)^2 R$, variables con el tiempo.

Resumen de las unidades de masa y fuerza:

C. G. S. { Masa: gramo $= 10^{-3}$ kg $= 0{,}102 \cdot 10^{-3}$ u. t. m.
Fuerza: dina $= 10^{-5}$ newton $= 0{,}102 \cdot 10^{-5}$ kp.

Giorgi { Masa: kilogramo $= 1\,000$ g $= 0{,}102$ u. t. m.
Fuerza: newton $= 10^5$ dinas $= 0{,}102$ kp.

Técnico { Masa: u. t. m. $= 9{,}806$ kg $= 9\,806$ g.
Fuerza: kilopondio $= 9{,}806$ newton $= 9{,}806 \cdot 10^5$ dinas.

Concepto de impulso mecánico y de cantidad de movimiento. — Llamaremos *impulso* de una fuerza, que actúa durante un intervalo de tiempo t, al producto $\vec{F} \cdot t$. Es pues, una magnitud vectorial de módulo $F \cdot t$ y la misma dirección y sentido que la fuerza.

Se llama *cantidad de movimiento* al producto de la masa de un cuerpo por su velocidad; es pues también una magnitud vectorial de la misma dirección y sentido que la velocidad. Vamos a relacionar estas magnitudes, suponiendo la fuerza constante:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot \vec{a} dt = m \cdot \vec{dv} = d(\vec{mv})$$

$$\vec{F} \cdot dt = d(\vec{mv})$$

$$\vec{F} \cdot t = \Delta(\vec{mv}) = m(\vec{v} - \vec{v_0}).$$

Es decir, el impulso de una fuerza al actuar sobre un cuerpo durante cierto intervalo de tiempo t es igual a la variación de la cantidad de movimiento que produce en este intervalo.

Unidades y dimensiones. — El impulso se mide en dina·seg., newton·seg., kp·seg., en los tres sistemas C. G. S., Giorgi y Técnico, respectivamente.

La cantidad de movimiento en el C. G. S. se mide en g·cm/seg., en el Giorgi en kg·m/seg., y en el Técnico en (u. t. m.)·m/seg.

Las dimensiones son:

$$[\text{impulso}] = MLT^{-2} \cdot T = MLT^{-1}$$

$$[\text{cantidad de movimiento}] = MLT^{-1}$$

es decir, tienen las mismas dimensiones.

Conservación de la cantidad de movimiento. — Supongamos un sistema aislado, es decir, un sistema sobre el cual no actúe ninguna fuerza exterior. El impulso $F \cdot t$ es nulo; luego $\Delta(mv) = 0$; es decir, la cantidad de movimiento debe permanecer constante (para que su variación sea nula). Si el sistema estaba en reposo esta constante es cero. Tenemos como ejemplo el de un cañón que dispara un proyectil. El sistema estaba inicialmente en reposo, luego la cantidad de movimiento será siempre nula,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \quad \text{o sea.} \quad m_1 v_1 = -m_2 v_2,$$

es decir, si el proyectil de masa m_1 sale con velocidad v_1, el cañón de masa m_2 retrocede con la velocidad v_2. Otro ejemplo es la de un tripu-

lante de un bote en reposo, flotando en el mar, que se lanza al agua con cierta velocidad, el bote retrocede con una velocidad

$$v = \frac{m'}{m} v'$$

$m' =$ masa del tripulante
$m =$ masa del bote
$v' =$ velocidad del tripulante.

Otra importante aplicación es la de los cohetes y motores a reacción.

PRÁCTICAS

Estudio experimental cuantitativo del movimiento de caída de los cuerpos. Existen distintos artificios para estudiar el movimiento de caída. Uno de ellos es el conocido por el nombre de *máquina de Atwood*. Consta de una polea fija, que puede girar con rozamiento muy pequeño, por la cual pasa un hilo que sustenta en sus extremos dos masas iguales (fig. 54). Siendo despreciable el

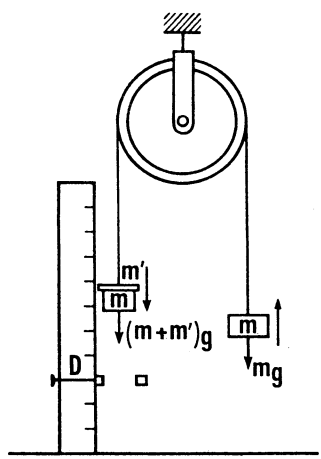


FIG. 54

peso del hilo, las dos masas están en equilibrio en cualquier posición. Tenemos adosada una regla graduada vertical y colocamos la masa próxima a la regla en la parte superior. Añadiendo una sobrecarga de masa m' a la citada masa, el sistema se desplaza cayendo la masa con la adicional y ascendiendo la otra.

Con un cronómetro, medimos el tiempo que tarda en descender una longitud determinada y observamos que los espacios, son directamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos, de aquí deducimos que el movimiento, es uniformemente acelerado.

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2}\, a t_1^2 \\ S_2 = \frac{1}{2}\, a t_2^2 \\ \text{Si } a \text{ es constante} \end{array}\right\} \frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1^2}{t_1^2}$$

Para determinar la velocidad en un instante, sujetamos a la regla un disco D con un orificio central de diámetro tal que pase libremente la masa m pero no la sobrecarga m'. Podemos colocar este disco en una posición escogida de antemano. Al caer las masas, en el instante de atravesar el disco, la masa m' queda detenida, continuando el movimiento por inercia a velocidad constante (ya que no hay aceleración), lo cual podemos comprobar midiendo el tiempo que tarda en recorrer espacios iguales, constatando que éstos son iguales. Dividiendo el espacio recorrido por el tiempo empleado en recorrerlo obtenemos la velocidad. Situando el disco a distintas alturas y determinando la velocidad en cada caso, tal como lo hemos hecho antes, comprobaremos que las velocidades son proporcionales a los tiempos que ha tardado en llegar al punto considerado; lo mismo que en el movimiento uniformemente acelerado.

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a t_1 \\ v_2 = a t_2 \end{array}\right\} \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Vamos a estudiar este movimiento. Siendo la aceleración de caída constante la fuerza que lo origina debe serlo también. Las fuerzas que actúan serán: los pesos de las masas iniciales, que son opuestos y se anulan, y el peso de la sobrecarga $p' = m' \cdot g$. La masa en movimiento es igual a la suma de las masas $m + m + m' = 2\ m + m'$; así pues, según el segundo principio de la Dinámica debe cumplirse la ecuación

$$F = (2m + m') \cdot a\,; \qquad m'g = (2m + m') \cdot a\,; \qquad a' = \frac{m'g}{2m + m'}$$

Si variamos la sobrecarga de modo que su masa sea m'' podremos comprobar que la aceleración es

$$a' = \frac{m''g}{2m + m''}$$

Eligiendo una sobrecarga muy pequeña, la aceleración de caida lo será también, y podremos medir el tiempo de caída con mayor comodidad, por ser mayor la duración del descenso. En este caso, en la fórmula anterior, podemos despreciar m' en el denominador, frente a $2m$ y entonces comprobaríamos que la aceleración es proporcional a la sobrecarga m'

$$a = \frac{m'g}{2m} = \frac{g}{2m}\, m'$$

Método del plano inclinado. — Este método fue utilizado por Galileo en sus estudios acerca de la caída de los cuerpos. Podemos construir un plano inclinado con una tabla de madera que pueda inclinarse a voluntad, con una ranura lisa y recta a lo largo de dicha tabla. Por esta ranura hacemos descender una bola metálica tal, que pueda considerarse el rozamiento despreciable. Al estudiar

el plano inclinado vimos que la fuerza que obliga a caer al cuerpo era $F = mg \text{ sen } \alpha = mg\frac{h}{l}$ siendo α el ángulo que forma el plano con la horizontal, h el desnivel de sus extremos y l su longitud (fig. 55). La aceleración del movimiento de la bola es $a = \frac{F}{m} = g \text{ sen } \alpha = \frac{g \cdot h}{l}$. Si h es pequeña y la longitud l es grande, la aceleración es pequeña y la bola cae, con un movimiento que se puede observar con facilidad. Midiendo el tiempo que tarda la bola en recorrer una longitud determinada, comprobaremos que el espacio recorrido

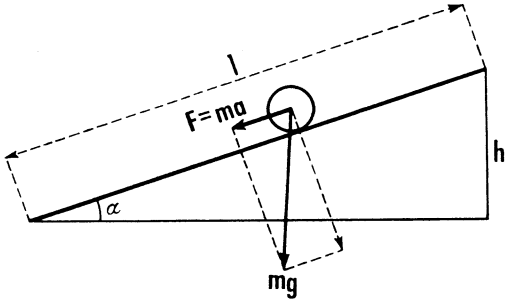


FIG. 55

es proporcional al cuadrado del tiempo que ha tardado en recorrerlo. Lo cual indica que es un movimiento uniformemente acelerado. Variando el ángulo de inclinación, veríamos que el tiempo disminuye si la inclinación aumenta, de modo que los cuadrados de los tiempos empleados en recorrer la misma distancia, están en razón inversa de los desniveles h de sus extremos en cada caso $\frac{t^2}{t'^2} = \frac{h'}{h}$.

Si la inclinación es nula, la bola permanece en reposo, y si es de 90° la bola cae libremente con la aceleración g.

Estos dos métodos son clásicos. Un método más preciso, con el cual se puede estudiar la caída libre, consiste en fotografiar, a intervalos regulares de tiempo, un cuerpo en su caída. Esto se logra, iluminando el cuerpo con una lámpara especial, que produce intensos destellos a intervalos regulares de tiempo, cuya duración podemos controlar. Para que la imagen fotográfica sea nítida la duración de un destello debe ser pequeñísima. Disponemos una máquina fotográfica a oscuras en «pose» y hacemos funcionar la lámpara en el instante de soltar el cuerpo. En la fotografía, aparecerán las imágenes del cuerpo en sus sucesivas posiciones, distantes entre sí, el espacio recorrido por el móvil en el intervalo de tiempo transcurrido entre dos destellos consecutivos. Así pues, comprobaremos que las imágenes están cada vez más espaciadas y podemos comprobar que los espacios recorridos son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos. Si colocamos una regla graduada vertical al lado de la trayectoria del cuerpo, quedaría su imagen en la placa fotográfica y así podemos determinar las distancias entre las imágenes. Como

los tiempos son conocidos, se obtiene la aceleración aplicando las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado. Sea t el intervalo de tiempo entre dos destellos sucesivos. En el primer intervalo recorre un espacio $s_1 = \frac{1}{2} at^2$; al cabo de dos intervalos consecutivos ha recorrido el espacio $s_2 = \frac{1}{2} a\ (2t)^2 = \frac{1}{2} at^2 \cdot 4$. En el segundo intervalo ha recorrido $s_2 - s_1 = \frac{3}{2} a \cdot t^2$, en el tercero $s_3 - s_2 = \frac{5}{2} at^2$; así pues, podemos hallar a.

$$a = \frac{2}{3} \frac{s_2 - s_1}{b} = \frac{2}{5} \frac{s_3 - s_2}{t} = \frac{2}{9} \frac{s_4 - s_3}{t} = \ldots$$

CUESTIONES

1. *Cítense ejemplos relacionados con el principio de la inercia.*

2. *¿Cuál sería la unidad de fuerza, en un sistema en el cual las unidades fundamentales son la tonelada masa, el kilómetro y la hora? ¿Cuál sería su equivalencia en el sistema Giorgi?*

3. *Comprimimos una pelota de goma, con una tabla, contra una pared y observamos que se deforma por igual en el lado donde actuamos nosotros y en el contacto con la pared. Explíquese el fenómeno.*

4. *Transportando un cubo de agua, si aceleramos el paso, cae agua en sentido contrario al movimiento y si paramos, en el mismo sentido en que nos movíamos. Interpreten el citado fenómeno.*

5. *Interpreten el fenómeno del pasajero que va de pie en un vehículo, que cae hacia atrás al acelerar el vehículo y hacia adelante al parar.*

6. *Interpretar la operación, de desprender las gotas de agua, adheridas en las paredes de una probeta, sacudiéndola bruscamente.*

7. *Un cuerpo está en equilibrio, cuando la resultante de las fuerzas que sobre él actúan, pasa por la base de sustentación. ¿Por qué un ciclista se inclina en una curva y hacia qué lado?*

8. *¿Puede existir movimiento sin fuerzas?*

9. *¿Podría un viajero de un cohete que se acerca a la Tierra «caer hacia arriba»?*

10. *¿Puede existir movimiento circular sin fuerzas?*

11. *Atamos un cuerpo a un cordel y colocamos un dinamómetro en el extremo del hilo. Le comunicamos un movimiento de rotación, en un plano vertical, de velocidad angular constante. ¿Indicará el dinamómetro siempre lo mismo?*

12. *Estamos sobre un vagón cargado de piedras. ¿Qué ocurrirá si lanzamos una piedra hacia fuera? Discutir el resultado según la dirección del lanzamiento. (Se desprecia el rozamiento.)*

PROBLEMAS

1. Una fuerza de 8000 dinas actúa sobre un cuerpo de masa 0,04 kg. ¿Cuál es la aceleración que adquiere?

2. Dos fuerzas concurrentes, de 3 y 4 kp y direcciones perpendiculares, actúan sobre una masa de 800 g. ¿Cuál es la aceleración que le imprimen?

3. Un tren de 300 toneladas parte del reposo. Al cabo de 2 minutos, su velocidad es de 36 km/hora. Calcular la fuerza media de tracción prescindiendo de los rozamientos.

4. ¿Qué fuerza debemos aplicar a un cuerpo de 8 kg para que ascienda con una aceleración de 12,1 m/s^2, teniendo presente que $g = 9{,}8$ m/s^2.

5. Una persona de masa 70 kg va en un ascensor. ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre la base del mismo, en los siguientes casos?

a) el ascensor sube con una aceleración de 4 m/s^2;
b) el ascensor desciende con una aceleración de 5 m/s^2;
c) el ascensor asciende a velocidad constante.

6. Sobre la mesa del coche restaurante de un tren, tenemos una bola de billar colocada en el centro de una mesa, supuesta cuadrada y de lado 1 m. Arranca el tren, con una aceleración de 0,2 m/s^2. Despreciando el rozamiento, determinar cuánto tiempo tarda la bola en llegar al extremo de la mesa y cuál es su velocidad en este momento.

7. Un cuerpo cae por un plano inclinado 30° sin rozamiento. ¿Cuál es su aceleración y cuánto tarda en recorrer una longitud de 40 cm?

8. En la parte superior de un plano inclinado 45° tenemos una polea. Un cuerpo, situado en el plano, de 400 g de masa está enlazado con otro de 200 g por medio de un hilo que pasa por la polea, de modo que el segundo cuerpo quede suspendido verticalmente. Determinar la aceleración del movimiento.

9. Un automóvil va a 60 km/hora y recorre una carretera donde existe una curva de 200 m de radio. Sabiendo que la masa del automóvil es de 800 kg, determinar la fuerza centrífuga a que está sometido.

10. Calcular la fuerza centrífuga a la que se halla sometida una masa de 20 kg situada a la latitud de 60° a consecuencia de la rotación de la Tierra (radio de la Tierra 6400 km).

11. Determinar la cantidad de movimiento de un vehículo de masa 1000 u. t.m. y que marcha a la velocidad de 50 km/hora.

12. Un cuerpo de 20 g se mueve con una velocidad de 400 cm/s. Determinar el valor de la fuerza que actuando durante 4 segundos sobre el cuerpo hace que su velocidad pase a ser de 1 m/s.

13. Un automóvil de 400 kg, va a 60 km/hora. Calcular el valor de la fuerza, que en 40 segundos, lo pararía (suponiendo fuerza constante).

14. Una pelota de 50 gramos choca y rebota con la misma velocidad de 10 m/s en una pared. ¿Cuál es la variación de su cantidad de movimiento? Suponiendo que el choque ha durado 0,06 segundos, calcular el valor de la fuerza media que ha actuado sobre la pelota.

15. Un cañón dispara un proyectil de 20 kg de masa con una velocidad de 400 m/s. Sabiendo que el tiempo que actúa la fuerza de los gases de la pólvora es de 0,2 segundos determinar la fuerza media que ha actuado sobre el proyectil. Si el cañón pesa 10 toneladas, ¿cuál es su velocidad de retroceso?

CAPÍTULO V

TRABAJO Y ENERGÍA

El trabajo como producto escalar. — Una fuerza constante $\vec{F}$ está aplicada a un punto material situado en O. Supongamos que lo desplaza siguiendo un camino recto OA, una longitud l (fig. 56). El trabajo de la

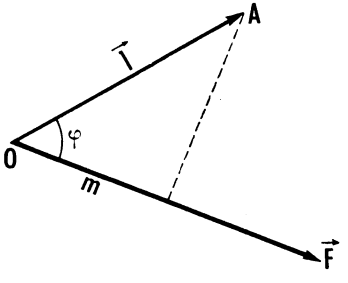


FIG. 56

fuerza en este desplazamiento vale $\mathfrak{T} = F \cdot l \cdot \cos \varphi$, o bien el producto de la fuerza por la proyección de l sobre F. Este trabajo se puede expresar en forma de producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento y podemos escribir:

$$\mathfrak{T} = \vec{F} \cdot \vec{l} = F \cdot l \cdot \cos \varphi$$

Si $\varphi = 0$ el trabajo $\mathfrak{T} = F \cdot l$; si $\varphi = 90°$ $\mathfrak{T} = 0$

Si $\varphi < 90°$ $\mathfrak{T} > 0$ trabajo motor.

Si $\varphi > 90°$ $\mathfrak{T} < 0$ trabajo resistente.

Cuando una fuerza aplicada a un punto material le obliga a efectuar desplazamientos sucesivos, el trabajo total es igual a la suma de los trabajos parciales. Si la fuerza es constante el trabajo total es igual al pro-

ducto de la fuerza por la suma de las proyecciones de los desplazamientos parciales sobre la dirección de la fuerza. La suma de estas proyecciones es igual a la proyección del camino total sobre la dirección de la fuerza.

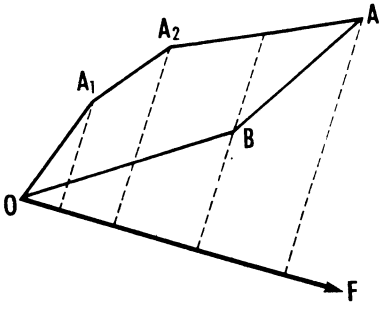


FIG. 57

Recordando que las proyecciones sobre un mismo eje, de dos líneas que tienen los extremos comunes son iguales, deducimos que una fuerza constante al desplazar un punto de una posición a otra, ha efectuado un trabajo independiente del camino seguido para ir de un punto a otro (fig. 57).

Unidades. — Definiremos las unidades de trabajo en los tres sistemas:

SISTEMA C. G. S. — La unidad es el *ergio*, que es el trabajo de una dina al desplazar su punto de aplicación un centímetro en su propia dirección.

SISTEMA GIORGI. — La unidad es el *julio*, que es el trabajo de un newton al desplazar su punto de aplicación un metro, en su propia dirección:

$$1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dinas}$$

$$1 \text{ julio} = 10^5 \text{ dinas} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ ergios.}$$

SISTEMA TERRESTRE O TÉCNICO. — La unidad es el *kilopondímetro* o *kilográmetro*, que es el trabajo de un kilogramo peso (kilopondio), al desplazar su punto de aplicación un metro, en su propia dirección.

$$1 \text{ kilopondio} = 9{,}806 \text{ newton.}$$

$$1 \text{ kilográmetro} = 9{,}806 \text{ newton} \cdot 1 \text{ m} = 9{,}806 \text{ julios} = 9{,}806 \cdot 10^7 \text{ ergios.}$$

Dimensiones. — Las dimensiones de un trabajo son las de una fuerza por una longitud. Las dimensiones de una fuerza son $[F] = MLT^{-2}$, las de un trabajo son $[\mathfrak{T}] = ML^2T^{-2}$

Trabajo de una fuerza variable. — Sea una fuerza variable que aplicada a un punto lo desplaza siguiendo cierta trayectoria. Dividimos dicha

trayectoria en desplazamientos elementales lo suficientemente pequeños, para poder considerar la fuerza constante en cada uno de ellos. Calculamos el trabajo elemental en cada uno de estos pequeños desplazamientos $\vec{F} \cdot \vec{\Delta l}$ y sumamos estos trabajos. El trabajo total vale $\mathcal{C} = \sum_1^n \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta l}_i$. Si la trayectoria es curvilínea esta suma se transforma en integral. Para hallar el trabajo de F entre dos puntos O y A, hay que calcular

$$\int_{OA} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{OA} F dl \cos \varphi$$

a lo largo de la trayectoria. Este trabajo en general depende del camino seguido para pasar de O a A.

Supongamos la fuerza constante en dirección y sentido, pero de módulo variable (fig. 58). Calcularemos el trabajo de la fuerza al desplazar el punto de O a A siguiendo cierto camino, dividiendo la trayectoria en desplazamientos elementales y proyectaremos estos pequeños desplazamientos sobre

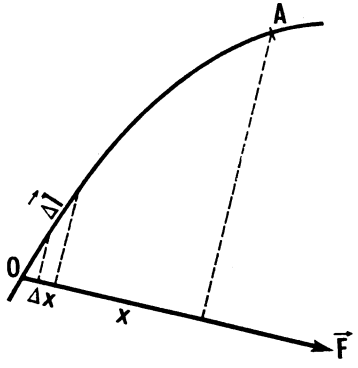


FIG. 58

la dirección de la fuerza. El trabajo total es la suma de los productos de fuerza por la proyección del desplazamiento elemental sobre ella:

$$\mathcal{C} = \Sigma F \ \Delta x.$$

El valor medio de la fuerza es la relación entre el trabajo y la proyección del camino sobre la dirección de la fuerza.

$$F_m = \frac{\Sigma F \cdot \Delta x}{x} = \frac{\mathcal{C}}{x}$$

Potencia. — Supongamos que el trabajo de una fuerza durante un tiempo t vale $\mathfrak{T}$. Definiremos la *potencia media* de esta fuerza durante este tiempo, al cociente entre el trabajo efectuado y el tiempo t:

$$P = \frac{\mathfrak{T}}{t}.$$

Si la fuerza es variable, el trabajo no es el mismo en cualquier intervalo de tiempo y entonces podemos definir la potencia como la relación entre el trabajo elemental de la fuerza y el intervalo de tiempo en el cual lo ha producido

$$P = \frac{d\mathfrak{T}}{dt}$$

podemos relacionar la potencia con la velocidad del punto en su desplazamiento:

$$d\mathfrak{T} = \vec{F} \cdot \vec{dl} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt; \qquad P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Es decir, la potencia de la fuerza que desplaza un punto en un instante, es igual al producto escalar de la fuerza por la velocidad del punto en este instante.

Unidades. — En el sistema C. G. S., la unidad de potencia es el ergio/s. Es la potencia de una fuerza que realiza el trabajo de un ergio en un segundo.

En el sistema Giorgi, la unidad de potencia es el *vatio* (W). Es la potencia de una fuerza que realiza el trabajo de un julio en un segundo. Vale, por tanto, 10^7 ergios/s.

En el sistema terrestre la unidad de potencia es el kilográmetro/s. Es la potencia de una fuerza que efectúa el trabajo de un kilográmetro en un segundo. Equivale a

$$9{,}806 \text{ julios/s} = 9{,}806 \text{ vatios} = 9{,}806 \cdot 10^7 \text{ ergios/s}$$

Existe una unidad que se utiliza en la práctica que es el caballo de vapor (CV), que equivale a 75 kilográmetros/s = 736 vatios.

Dada la potencia, si queremos determinar el trabajo, si la potencia es constante, multiplicaremos la potencia por el tiempo durante el cual actúa la fuerza. De aquí se deduce una unidad de trabajo que es el kilovatio·hora que es el trabajo de la potencia de 1 kW durante una hora. Equivale a $1000 \text{ vatios} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^6$ julios, y se utiliza mucho en electricidad.

Energía cinética. — Un punto material de masa m que se desplaza con una velocidad v es capaz de producir trabajo (por ejemplo, al chocar con otro puede desplazarlo), es decir, posee una energía. Por estar en movimiento, a su energía se le llama *energía cinética,* y es igual a la mitad del producto de su masa por el cuadrado de su velocidad:

$$E_c = \tfrac{1}{2}\, m \cdot v^2$$

Si un cuerpo se mueve con movimiento de traslación, o sea que todos sus puntos poseen la misma velocidad, la energía cinética del cuerpo es igual a la suma de las energías cinéticas de cada uno de los puntos materiales en que puede considerarse descompuesto. Es decir,

$$E_c = \tfrac{1}{2} \Sigma m\, v_i^2$$

pero como v es la misma para todos los puntos,

$$E_c = \tfrac{1}{2} v^2 \Sigma m_i$$

y como $\Sigma m_i = m$ es la masa del cuerpo, resulta que la energía cinética de un cuerpo de masa m que se desplaza con movimiento de traslación a la velocidad v, es igual a la mitad del producto de su masa por el cuadrado de la velocidad de traslación.

Teorema de las fuerzas vivas. — Supongamos un cuerpo en movimiento que se desplaza a la velocidad $\vec{v}_0$. Le aplicamos en la misma dirección y sentido que $\vec{v}_0$ una fuerza constante $\vec{F}$ hasta que su velocidad es $\vec{v}$. El trabajo de la fuerza es $F \cdot l$, siendo l el camino recorrido por el móvil mientras ha actuado la fuerza. El movimiento es acelerado y la aceleración es $a = \dfrac{v - v_0}{t}$; el espacio l vale $l = v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2 = v_0 t + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{v - v_0}{t} \right) t^2$

El trabajo

$$F \cdot l = m \cdot a \cdot l = m \frac{v - v_0}{t} [v_0 t + \frac{1}{2} (v - v_0) t] = m[(v - v_0) v_0 + \frac{1}{2} (v - v_0)^2]$$

o sea: el trabajo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Éste es el *teorema de las fuerzas vivas,* y nos dice que el trabajo de una fuerza aplicada a un cuerpo es igual a la variación de energía cinética (a la energía cinética se le llama también *fuerza viva,* de aquí el nombre del teorema) experimentada por el cuerpo debida a la acción de la fuerza. Si el cuerpo estaba en reposo, $v_0 = 0$, y resulta que el trabajo de la fuerza aplicada a un cuerpo en reposo, hasta que éste adquiere cierta velocidad, es igual a la energía cinética del cuerpo en aquel instante. Si la fuerza es variable, llegaríamos al mismo resultado, pero la demostración se hace por cálculo integral.

$$\mathcal{T} = \int_{v_0}^{v} F \cdot dl = \int_{v_0}^{v} ma \cdot v\, dt$$

Como $a\, dt = dv$, $\quad \mathcal{T} = m \int_{v_0}^{v} v\, dv = \tfrac{1}{2} m\, [v^2]_{v_0}^{v} = \tfrac{1}{2} m\, [v^2 - v_0^2]$

Energía potencial gravitatoria. — Supongamos un punto de masa m situado en O (fig. 59) en las proximidades de la superficie terrestre. Esta masa está sometida a la fuerza de la gravedad (su peso), que puede considerarse constante. Si debido a la acción de esta fuerza se desplaza de O a A, la fuerza peso ha efectuado un trabajo, que será igual al producto de la fuerza por la proyección del camino sobre su dirección, independientemente del camino seguido para llegar a A. El trabajo vale, pues, $p \cdot h = mgh$. Supongamos ahora que desplazamos el punto material de O a B. En este caso, el trabajo es negativo, y vale $-mgh'$. Está realizado contra la fuerza peso por una fuerza exterior. Si el punto regresa a O

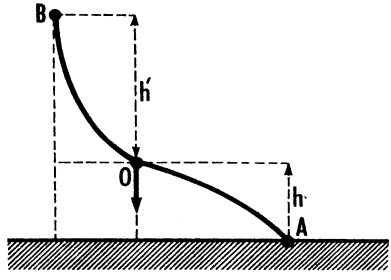


FIG. 59

desde B, el trabajo de la fuerza peso vale mgh'. Es decir, que trasladando la masa a un punto más alto que el que ocupa, se almacena energía, que puede convertirse en trabajo por la acción de la fuerza peso. A esta energía, que depende de la posición del punto material en el campo de la gravedad, se le llama *energía potencial gravitatoria.* Depende de la posición del punto; es decir, de la altura sobre un nivel, fijado de antemano. Este nivel de referencia puede tomarse coincidente con el suelo o con el nivel del mar.

La energía potencial gravitatoria de un punto material situado a cierta altura es igual al trabajo efectuado para situarlo en aquel punto y es independiente del camino seguido. Vale mgh.

El trabajo necesario para desplazar una masa desde un punto a otro situado a la misma altura es nulo.

Conservación de la energía mecánica. — El principio de conservación de la energía mecánica dice: *En un sistema independiente de toda acción exterior (sistema aislado), la suma de las energías cinética y potencial es constante.*

Vamos a comprobarlo en el campo de la gravedad. Una masa m está situada en un punto a la altura h' y posee una velocidad v' vertical des-

cendente. Las fuerzas de la gravedad actúan sobre esta masa, y a la altura h su velocidad es v. Aplicando el teorema de las fuerzas vivas

$$\mathcal{T} = mg(h' - h) = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv'^2$$

o sea

$$mgh' + \tfrac{1}{2}mv'^2 = mgh + \tfrac{1}{2}mv^2$$

pero mgh' es la energía potencial en el punto situado a la altura h', y mgh la energía potencial en el punto a la altura h; luego

$$E_p' + E_c' = E_p + E_c = \text{constante}$$

La suma de la energía cinética y de la potencial es la misma a cada altura. Cuando $v = 0$, la energía es potencial, y si $h = 0$, sólo es cinética.

Ejemplo: Lanzamos un cuerpo con una velocidad de 40 m/s verticalmente desde suelo. ¿Cuál es su velocidad a 20 m de altura?

La energía total del cuerpo, es igual a la cinética en el momento de ser lanzado $= \frac{1}{2}mv_0^2$, a cierta altura h la suma de las energías cinéticas y potencial valen $mgh + \frac{1}{2}mv^2$, aplicando el principio de la conservación de la energía: $mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$; despejando v

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{40^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 20} = 34{,}8 \text{ m/s}$$

APENDICES

1.° ESTUDIO DEL ROZAMIENTO

Supongamos un cuerpo descansando sobre una superficie plana. El peso del cuerpo es anulado por la reacción del apoyo plano. Aplicando al cuerpo una fuerza paralela al apoyo, éste debería moverse con una aceleración $a = \frac{F}{m}$. Experimentalmente observamos que para que este cuerpo se mueva es necesario que el valor de la fuerza sea superior a cierto valor F_0. Es como si tuviese que vencer una fuerza opuesta a la aplicada y de valor F_0. Una vez en movimiento, la aceleración valdrá $a = \frac{F - F_0}{m}$. Esta fuerza F_0 es debida al rozamiento entre el cuerpo y la superficie sobre la cual se desplaza. En general el rozamiento puede definirse como una fuerza que se opone al desplazamiento tangencial de dos cuerpos en contacto.

Cuando un cuerpo se desliza sobre otro, se produce rozamiento por

fricción y depende de las rugosidades de la superficie de contacto y de la fuerza de cohesión.

Las leyes del rozamiento por fricción fueron enunciadas por Coulomb, que las había deducido experimentalmente. Éstas son:

1.ª *La fuerza de rozamiento es independiente de la superficie de contacto.*

2.ª *El valor de la fuerza de rozamiento es proporcional a la componente normal de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.*

3.ª *La fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad de desplazamiento* (siempre que sea pequeña).

La primera ley no es evidente, pues parece que a mayor superficie debería haber mayor fuerza de rozamiento. En el caso de un freno por fricción, el aumento de superficie logra que el freno se desgaste menos, pues disminuye la presión, pero la fuerza de rozamiento no varía.

En la segunda ley se entiende que la componente normal es la perpendicular al plano de la superficie de apoyo. Si éste es horizontal, siempre debemos considerar el peso del cuerpo que actúa normalmente al apoyo. En este caso la fuerza de rozamiento es proporcional al peso (si no actúa ninguna fuerza que tenga componente normal). A la constante de proporcionalidad se le llama *coeficiente de rozamiento por fricción.* Este coeficiente puede ser *estático* o *dinámico,* según que la fuerza de rozamiento logre que el cuerpo permanezca en reposo o se oponga al movimiento. El primero es mayor que el segundo. Así pues, el valor mínimo de la fuerza que mueve un cuerpo en reposo es $F = \mu N$, siendo μ el coeficiente de rozamiento estático y N la componente normal de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Si el cuerpo se mueve por la acción de una fuerza, la aceleración vale

$$a = \frac{F - \mu' N}{m}$$

siendo μ' el coeficiente de rozamiento dinámico. Caso de moverse con velocidad constante,

$$a = 0; \qquad \mu' = \frac{F}{N}$$

Si un cuerpo está sobre un plano inclinado, formando un ángulo α con la horizontal, la fuerza que lo hace descender vale $F = mg$ sen α, y la componente normal del peso vale mg cos α, la fuerza de rozamiento vale $F_R = \mu mg$ cos α. Supongamos que variando el ángulo del plano logramos que el cuerpo permanezca en equilibrio hasta que para un valor de $\alpha = \alpha_1$ se inicia el deslizamiento. Entonces la fuerza de rozamiento es igual a la que le haría descender; es decir, μmg cos $\alpha_1 = mg$ sen α_1, y de aquí: $\mu =$ tg α_1 (véase Prácticas).

Para determinar el trabajo de las fuerzas de rozamiento debemos con-

siderar que éstas se oponen al movimiento, y por tanto forman 180° con el desplazamiento; siempre el trabajo es negativo y vale $-\mu' Nl$.

Problema: Un cuerpo situado en la parte superior de un plano inclinado 60° y de 4 m de longitud se lanza hacia la base, paralelamente al plano, con una velocidad de 5 m seg. Hallar la velocidad al llegar a la base. El coeficiente de rozamiento dinámico del cuerpo con el plano vale 0,2.

Energía inicial $= \frac{1}{2} mv_0^2 + mgh$.

Energía final $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 - mgh - \mu mg \cos \alpha \cdot l$; $h = l \operatorname{sen} \alpha$.

Despejando v:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gl \operatorname{sen} \alpha - 2\mu gl \cos \alpha} = \sqrt{5^2 + 9{,}8 \cdot 4 (\sqrt{3} - 0{,}2)} = 9{,}22 \text{ m/s}$$

Rozamiento de rodadura. — Una rueda apoyada sobre un plano horizontal está en reposo. Le aplicamos una fuerza tangencial para hacerla rodar. No se inicia el movimiento hasta que la fuerza es superior a cierto valor F_0. En la rodadura, el valor de la fuerza que inicia el movimiento depende de su distancia al apoyo; por tanto consideraremos, en lugar de fuerza, el momento de la fuerza respecto al punto de apoyo.

Si la fuerza tangencial F se aplica al eje de la rueda, su momento respecto al apoyo vale $F \cdot R$, siendo R el radio de la rueda. En este caso, el valor mínimo del momento para iniciar el movimiento es proporcional a la fuerza normal N que ejerce la rueda sobre la superficie de apoyo. Como el momento es $F \cdot R$, debe ser proporcional a N; escribiremos: $F \cdot R = \varphi N$.

A la constante de proporcionalidad φ se le llama *coeficiente de rodadura*. La fuerza F es directamente proporcional a N y al coeficiente de rodadura φ e inversamente proporcional al radio R.

El coeficiente de rodadura es siempre muy inferior al de fricción; por esto se utilizan ruedas para el arrastre de vehículos.

2.º ESTUDIO DEL CHOQUE

Dos puntos chocan cuando se encuentran en un mismo instante en la intersección de sus trayectorias. Dos cuerpos chocan cuando esto ocurre a dos puntos cualesquiera de los mismos. Diremos que el choque es central cuando coinciden las trayectorias de los centros de gravedad de los cuerpos.

Choque elástico. — El choque de dos cuerpos es perfectamente elástico cuando no se pierde energía en el choque. En este caso debe conservarse la energía cinética de los cuerpos, o bien deben coincidir la suma de las energías cinéticas de los cuerpos antes y después del choque. Vamos a considerar el choque central de dos bolas esféricas que se mueven con velocidades v_1 y v_2, siendo sus masas m_1 y m_2, respectivamente.

Como el sistema es aislado, en el cual suponemos no actúan fuerzas exteriores, debe cumplirse la conservación de la cantidad de movimiento; es decir (como tienen la misma dirección escribimos la relación con los módulos) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 x + m_2 y$ (siendo x e y las velocidades después

del choque). Escribimos la igualdad de las energías cinéticas antes y después del choque:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 x^2 + \tfrac{1}{2} m_2 y^2$$

efectuando operaciones

$$\left.\begin{aligned} m_1(v_1 - x) &= m_2(y - v_2) \\ m_1(v_1^2 - x^2) &= m_2(y^2 - v_2^2) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} v_1 + x &= y + v_2 \\ y &= v_1 - v_2 + x \end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \qquad y = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Si la masa es la misma, $m_1 = m_2$:

$$x = v_2; \qquad y = v_1$$

Si la segunda bola estaba en reposo ($v_2 = 0$):

$$x = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \qquad y = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

En este caso, si $m_1 = m_2$,

$$x = 0; \qquad y = v_1$$

Si la segunda bola estaba en reposo y su masa es mucho mayor que la de la primera,

$$x = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}; \quad x = -v_1; \qquad y = 0 \qquad \frac{m_1}{m_2} \text{ puede considerarse nulo}$$

Por ejemplo: una bola que choca con una pared normalmente a ella, rebota con la misma velocidad.

Si la bola choca con la pared oblicuamente, siendo φ el ángulo que forma la velocidad con la normal a la pared, podemos descomponer la velocidad en dos componentes, una tangencial $v_t = v$ sen φ, y otra normal $v_n = v \cos \varphi$. La componente tangencial v_t es la misma antes y después del choque (si la bola no gira y no hay rozamiento en el choque). La componente normal v_n es igual, pero de signo contrario. Después del choque, la velocidad tiene las componentes $v_t = v$ sen φ, $v_n = -v \cos \varphi$. El ángulo que forma la velocidad con la normal es el mismo, pero negativo; está al otro lado de la normal. Podemos decir que la bola se ha reflejado con un ángulo igual al de incidencia (fig. 60).

Choque inelástico. — Es cuando los cuerpos se deforman en el choque, perdiéndose energía por la deformación y continúan después del choque,

ambos con una velocidad común. En este caso se conserva sólo la cantidad de movimiento. Sea x la velocidad común después del choque. Sean las masas m_1 y m_2, y las velocidades v_1 y v_2 antes del choque; debe verificarse:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)x; \qquad x = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

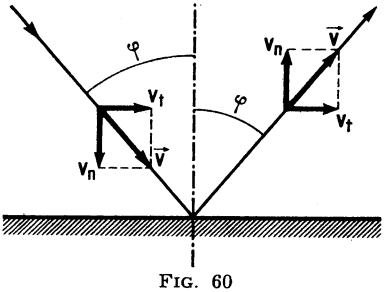


FIG. 60

Si una de las bolas es mucho mayor que la otra y estaba en reposo, la velocidad común $x = 0$. (Caso de una bola de plomo que choca con el suelo.)

Si el choque inelástico es oblicuo, hay que escribir las cantidades de movimiento vectorialmente, y luego hallar el vector velocidad común.

Ejemplo. — Dos bolas de plomo masas 2 y 5 kg se mueven en direcciones perpendiculares con velocidades respectivas de 15 m/s y 8 m/s. Determinar la velocidad después del choque (fig. 61).

$$\vec{m_1v_1} + \vec{m_2v_2} = (m_1 + m_2)\vec{x}$$

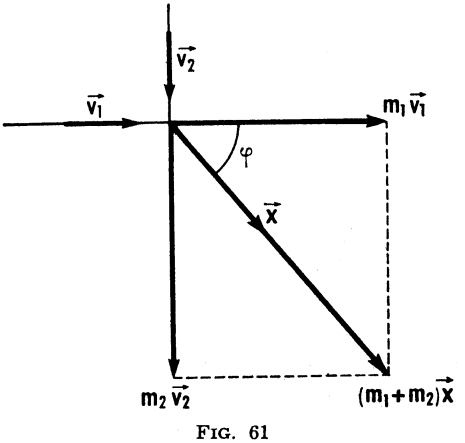


FIG. 61

por ser las direcciones perpendiculares (véase figura) los módulos deben cumplir

$$(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 = (m_1 + m_2)^2x^2; \qquad x = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{m_1 + m_2}$$

$$x = \frac{\sqrt{(2\cdot 15)^2 + (5\cdot 8)^2}}{2 + 5} = \frac{50}{7} \text{ m/s}; \qquad \text{tg } \varphi = \frac{m_2v_2}{m_1v_1} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

$$\varphi = 53° \ 7' \ 40''$$

La velocidad común vale $\frac{50}{7}$ m/s, formando un ángulo φ con la v_1, que vale $\varphi = 53° \ 7' \ 40''$.

PRÁCTICAS

Determinación de coeficientes de rozamiento. — Tomamos una placa del material que vamos a estudiar. Lo colocamos en la superficie sobre la que se deslizará, situado sobre una mesa. En el extremo de dicha mesa, disponemos una pequeña polea bien lubricada. Atamos un hilo fino y resistente a un extremo del cuerpo y después de pasar por la polea, le suspendemos verticalmente un platillo donde se pueden colocar pesas conocidas (fig. 62). Colocamos

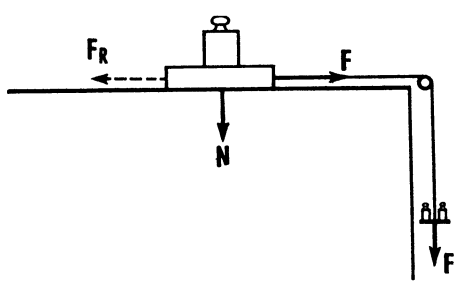


FIG. 62

sobre la placa un peso conocido, por ejemplo un kilogramo, en el platillo vamos añadiendo pesas hasta que el cuerpo empieza a deslizarse. Se quita la última pesa y se coloca otra menor. Por ejemplo, si vamos colocando en el platillo pesas de 100 en 100 g, quitamos la última colocada que hacía desplazar al cuerpo y la sustituimos por otra de 50 g. Si ésta también lo hace deslizar, la sustituimos por otra de 25 g. Si ésta no la desplaza, le añadimos pesas de

5 en 5 gramos hasta que vuelve a desplazarse. De esta forma podemos lograr determinar el coeficiente de rozamiento. Supongamos que la masa de la placa ensayada es de 150 g y las pesas del platillo suman 235 g.

La componente normal de las fuerzas, es igual a la suma del peso de la placa y el colocado encima. La fuerza igual a la de rozamiento, es el peso de las masas del platillo.

Sabemos que:

$$F = \mu N; \qquad \mu = \frac{F}{N} = \frac{235 \cdot g}{(1000 + 150)g} = \frac{235}{1150} = 0{,}204$$

Se puede repetir con distintas cargas y comprobar el resultado.

Otro método, es el del plano inclinado, citado en teoría. Tomamos una tabla plana de modo que pueda girar alrededor de un eje situado en el extremo *O* (p. ej. se coloca una bisagra). Adosamos una regla graduada vertical al otro extremo de forma que podamos medir su desnivel *h*. Con otra regla graduada medimos la base *b*. Así tenemos la tangente del ángulo de inclinación en cada caso que nos interese (fig. 63).

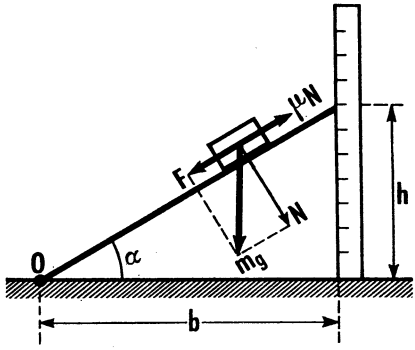


FIG. 63

Colocamos el cuerpo a ensayar sobre el plano y vamos levantando la tabla, con lo cual el ángulo de inclinación aumenta. En el momento de iniciarse el deslizamiento del cuerpo, mantenemos fija la tabla para determinar el desnivel y la base. Según sabemos el coeficiente de rozamiento estático vale $\mu = \text{tg}\ \alpha = \frac{h}{b}$.

Se repite varias veces con el mismo cuerpo y tomamos el promedio de los valores hallados.

Puede hallarse el coeficiente de rozamiento en distintas condiciones por ejemplo, humedeciendo el cuerpo, encerando la tabla, etc. y veremos que el coeficiente es distinto.

Para determinar el coeficiente de rozamiento dinámico μ' usaremos el primer método citado antes.

Aplicaremos una fuerza superior a la que inicia el deslizamiento y deter-

minaríamos la aceleración del movimiento, hallando el tiempo que tarda en desplazarse una longitud l.

$$\left.\begin{array}{ll} l = \frac{1}{2}\, at^2 & a = \dfrac{F - \mu' N}{m} \\ a = \dfrac{2l}{t^2} & \end{array}\right\} \quad \frac{F - \mu' N}{m} = \frac{2l}{t^2}$$

$$\mu' = \frac{1}{N}\left(F - \frac{2lm}{t^2} \right)$$

Supongamos aplicada una fuerza F', de forma que el cuerpo se deslice a velocidad constante, entonces $a = 0 \quad \mu' = \dfrac{F'}{N}$.

Problema: Un cuerpo de masa 2 kg se desliza por la acción de una fuerza de 1 newton, sobre un plano horizontal, tardando 2 segundos en recorrer 2 cm. Hallar el coeficiente dinámico de rozamiento.

$N = 2 \cdot 9{,}8$ newton
$l = 0{,}02$ m
$F = 1$ newton
$m = 2$ kg
$t = 2$ s

$$\mu' = \frac{1}{2 \cdot 9{,}8}\left(1 - \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 2}{2^2} \right) = 0{,}05$$

Si la fuerza fuese debida, como en el caso de la fig. 62, a un peso colgado, m sería la suma de las masas del cuerpo m_1 que se desliza y la m_2 del peso que hemos colgado

$$\mu' = \frac{1}{N}\left[m_2 g - \frac{2l\ (m_1 + m_2)}{t^2} \right]$$

en este caso $F = m_2 g$.

Medida de una potencia con un freno. — Podemos usar un freno de fricción (fig. 64). Para medir la potencia de un motor, lo acoplamos a un tambor que gire con él. Sobre el tambor aplicamos una banda de material duro y rugoso para que lo frene parcialmente, al tensar sus extremos, a cada uno de los cuales colocamos un dinamómetro. Con el motor parado los dos dinamómetros indican el mismo valor, que es el de la tensión de la banda. Cuando el motor gira, el tambor tiende a arrastrar la banda frotante y esto hace que los dinamómetros, indiquen valores distintos. Supongamos el sentido de giro el indicado en la figura. El dinamómetro de la izquierda indica F_1 y el otro F_2. La resistencia que vence el tambor es la diferencia $F_1 - F_2 = F$. Sabemos que la potencia $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ pero $\vec{F}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección, luego $P = F \cdot v = F \cdot 2\pi R N$, siendo R el radio del tambor y N el número de revoluciones por segundo del motor en estas condiciones.

Ejemplo: Determinar la potencia, en CV, de un motor usando el método del freno, con los siguientes datos:

$F_1 - F_2 = 50$ kp; $N = 240$ revoluciones/minuto; $R = 20$ cm.

$F = F_1 - F_2 = 50 \cdot 9{,}8$ newton.

$N = 240$ revoluciones/minuto $= 4$ vueltas/seg.

$R = 20$ cm $= 0{,}2$ m.

$P = 50 \cdot 9{,}8 \cdot 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4 = 251{,}2 \cdot 9{,}8$ vatios $= 3{,}374$ CV.

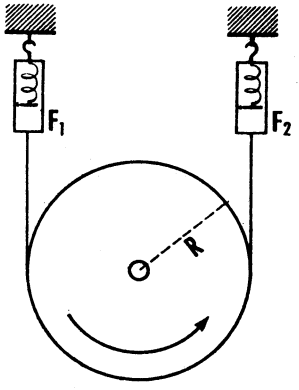


FIG. 64

CUESTIONES

1. *Citar ejemplos prácticos, de trabajo de una fuerza.*

2. *Representar gráficamente el trabajo de una fuerza constante en la misma dirección que el desplazamiento.*

3. *Representar gráficamente el trabajo de una fuerza de módulo proporcional al desplazamiento y de la misma dirección que aquél.*

4. *Un hombre sube un cuerpo por una escalera a cierto piso. ¿Si lo hubiese subido con una polea habría efectuado menos trabajo?*

5. *Explique por qué la velocidad de un ascensor disminuye al aumentar el número de personas que eleva.*

6. *Un motor eleva agua de un pozo. Al disminuir el nivel de agua disminuye el caudal elevado. ¿Por qué?*

7. *Dos cuerpos tienen la misma cantidad de movimiento. ¿Son iguales sus energías cinéticas?*

8. *Citar un caso práctico de un cuerpo que transforma su energía cinética en trabajo.*

9. Citar ejemplos de transformación de energía potencial en cinética y ésta a su vez en trabajo.

10. Citar ventajas e inconvenientes de fuerzas de rozamiento.

11. Una pelota de goma y una bola de plomo caen sobre una superficie metálica. Estudiar los dos choques.

PROBLEMAS

1. Una fuerza constante de 600 dinas, desplaza un punto material 2 metros en una trayectoria recta que forma un ángulo de 30° con la fuerza. ¿Cuál es el trabajo?

2. Una fuerza constante de 50 kp desplaza un punto material a lo largo de una circunferencia de radio 2 m. Determinar el trabajo cuando el punto ha recorrido media circunferencia, siendo la fuerza paralela al diámetro que une los dos puntos extremos.

3. Calcular el trabajo necesario para elevar un cuerpo de una tonelada a 4 metros de altura.

4. Determinar la potencia de un motor que nos eleve el peso del problema anterior a la misma altura en medio minuto.

5. Queremos elevar 500 litros de agua por segundo a una altura de 6 metros. Determinar la potencia teórica necesaria.

6. Una máquina eleva un peso de 600 kp con una velocidad de 3 m/s. Calcular la potencia de la máquina.

7. Una fuerza constante de 6000 dinas mueve un cuerpo de forma que su velocidad, en un instante determinado, vale 2 m/s. Sabiendo que la dirección de la fuerza forma 45° con la trayectoria rectilínea del punto, determinar la potencia.

8. Una central hidroeléctrica aprovecha un salto de agua de 60 metros de desnivel y 3 m^3/s de caudal. Determinar en CV y kilovatios la potencia teórica de la central.

9. Calcular la energía cinética de un camión de 3 toneladas que marcha a 40 km/hora. ¿Cuál debería ser su velocidad para que la energía cinética fuese la cuarta parte?

10. Un vehículo de 400 kg va a 50 km/hora. ¿Cuál será el trabajo de los frenos para disminuir la velocidad a su mitad?

11. Un cuerpo de 4 kg se mueve con una velocidad constante de 20 m/s. Le aplicamos una fuerza constante en su misma dirección y sentido y al cabo de 4 segundos su velocidad es de 25 m/s. ¿Cuál es la fuerza?

12. Calcular la energía potencial de un depósito lleno de agua de dimensiones $4 \times 10 \times 2$ metros, situado a 200 m de altura. ¿Qué potencia nos daría al vaciarse a razón del 200 litros/minuto?

13. Un cuerpo pesa 9000 dinas. El coeficiente de rozamiento estático con un plano horizontal, sobre el cual se puede deslizar, vale 0,06. ¿Cuál es la mínima fuerza necesaria para desplazarlo?

14. Sobre un cuerpo de masa despreciable apoyado sobre un plano horizontal actúa una fuerza que forma cierto ángulo con la vertical. Variando la inclinación de la fuerza, el cuerpo comienza a deslizarse sobre el plano, cuando el ángulo es de 15°. Hallar el coeficiente de rozamiento estático.

15. Lanzamos un cuerpo tangencialmente a un plano horizontal de forma que se deslice por él. El coeficiente de rozamiento dinámico vale 0,08 y la velocidad 6 m/s. Calcular la distancia recorrida por este cuerpo hasta pararse.

16. Se lanza un cuerpo hacia la parte superior de un plano inclinado de 45° con una velocidad de 4 m/s, en dirección paralela al plano, de forma que ascienda deslizándose. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico con el plano vale 0,1, determinar la longitud recorrida hasta pararse y cuál será la velocidad cuando regrese al punto de partida.

17. Dos bolas de 4 y 6 kg van a su encuentro con velocidades respectivas de 40 y 25 m/s. El choque es central e inelástico. Determinar su velocidad después del choque y la pérdida de energía cinética.

18. Un bloque de madera de 4 kg, está suspendido de un hilo de masa despreciable. Disparamos un proyectil de 15 g horizontalmente. Al chocar con la madera, el centro de gravedad del bloque se eleva, siendo la distancia vertical entre sus dos posiciones 6 cm. Hallar la velocidad del proyectil.

CAPÍTULO VI

ROTACIONES

Cuando un sólido rígido gira en torno de un eje fijo, todos sus puntos describen circunferencias, situadas en un plano perpendicular a dicho eje, con el centro sobre él. Por ser sólido rígido, la velocidad angular es la misma para todos los puntos del sólido, y lo mismo ocurre a la aceleración angular. La velocidad lineal depende de la distancia del punto al eje, y vale $v = \omega r$; la aceleración tangencial vale $a_t = \alpha r$ (siendo α la aceleración angular).

Analogías dinámicas entre el movimiento de traslación y de rotación. — Consideremos el sólido formado por la agrupación de puntos materiales cada uno de masa m_i. Al aplicar una fuerza tangencial al sólido, si éste gira, aparecen fuerzas de inercia en cada uno de los puntos materiales que constituyen dicho sólido (fig. 65). Según vimos en Dinámica, debe existir siempre equilibrio entre las fuerzas aplicadas y las de inercia. Para ello, además de cumplirse $\vec{F} + \vec{f}_i = 0$, debe verificarse que la suma de los momentos de las fuerzas de inercia y el momento resultante de las fuerzas exteriores, respecto al mismo eje sea igual a cero.

Para calcular la suma de los momentos de las fuerzas de inercia respecto al eje, sólo debemos considerar las componentes tangenciales, ya que las componentes normales tienen momento nulo, porque cortan al eje. La componente tangencial de las fuerzas de inercia vale $-ma_t$. Si m_i dista r_i del eje $a_t = \alpha r_i$, la fuerza de inercia para cada punto vale $-m_i r_i \alpha$. El momento respecto al eje es la proyección sobre él del momento de la fuerza respecto a un punto cualquiera del eje. Si la fuerza está contenida en un plano normal al eje, el momento vale la fuerza por la distancia eje-fuerza. El momento de las fuerzas de inercia será

$$-m_i r_i \alpha \cdot r_i = -m_i \cdot r_i^2 \, \alpha$$

Llamemos M al momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al eje de giro. Aplicando la condición de equilibrio dinámico

$$M - \Sigma m_i r_i^2 \alpha = 0, \quad \text{o bien} \quad M = (\Sigma m_i r_i^2)\alpha = I\alpha$$
$$M = I\alpha$$

(esta relación es escalar).

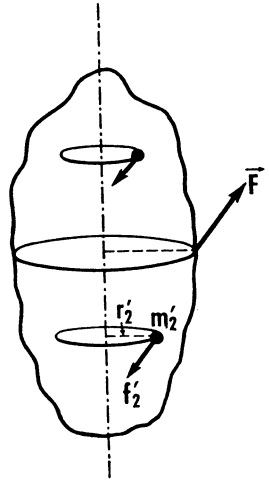


FIG. 65

Esta fórmula es la ecuación fundamental de la dinámica de rotación del sólido rígido alrededor de un eje fijo. Comparando esta ecuación con la del movimiento de traslación $F = ma$, vemos que presenta una gran analogía. No hay más que sustituir F por M, m por I, y la aceleración a por α.

Al aplicar un momento a un sólido que puede girar alrededor de un eje, el cuerpo gira con una aceleración angular proporcional al momento aplicado. En el movimiento de traslación, a la relación entre la fuèrza y la aceleràción le llamábamos masa inerte; en el de rotación, a la relación entre el momento y la aceleración angular le llamamos *momento de inercia.*

Si existen varias fuerzas, para hallar M hay que calcular el momento respecto al eje de cada una de ellas y sumarlos teniendo presente su signo.

Momento dè inercia. — La relación $\dfrac{M}{\alpha} = I = \Sigma mr^2$ es constante para cada sólido rígido; depende de su forma y de la distribución de masas. Si el sólido es homogéneo, depende sólo de su forma geométrica.

El momento de inercia de un cuerpo compuesto, respecto a un eje, es

igual a la suma de los momentos de inercia, respecto al mismo eje, de los cuerpos que lo constituyen. (Es consecuencia de la definición.)

El momento de inercia I de un cuerpo respecto a un eje paralelo a otro que pase por su centro de gravedad, es igual al momento de inercia I_G respecto al eje que pasa por el centro de gravedad, más la masa m del cuerpo por el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. (Teorema de Steiner.)

$$I = I_G + md^2$$

El cálculo del momento de inercia de un sólido es un problema de cálculo integral. Vamos a calcularlo en un caso sencillo: sea una varilla homogénea de masa m y longitud l. Descomponemos la varilla en elementos de masa dm. La masa por unidad de longitud vale $\frac{m}{l}$, la masa elemental vale $dm = \frac{m}{l} \cdot dr$ (fig. 66). La suma de productos de masas elementales por el cuadrado de distancias al eje vale

$$\int dm \cdot r^2 = \int \frac{m}{l} dr \cdot r^2$$

$$I = \frac{m}{l} \int_0^l r^2 dr = \frac{m}{l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^l = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2$$

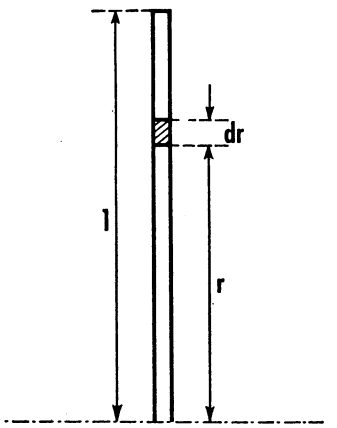


FIG. 66

Así pues, el momento de inercia de una varilla homogénea respecto a un eje que pasa por un extremo normal a la dirección del eje de la varilla vale

$$I = \tfrac{1}{3} m \cdot l^2$$

Si queremos calcular el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de gravedad paralelo al anterior, podemos hacerlo directamente o aplicando la fórmula dada anteriormente

$$\left.\begin{array}{l} I = I_G + m \cdot d^2 \\ I = \frac{1}{3} ml^2, \quad d = \frac{l}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{1}{3} ml^2 = I_G + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad \text{de donde} \quad I_G = \frac{1}{12} ml^2$$

En la figura 67 damos el momento de inercia de algunos cuerpos respecto a los ejes dibujados.

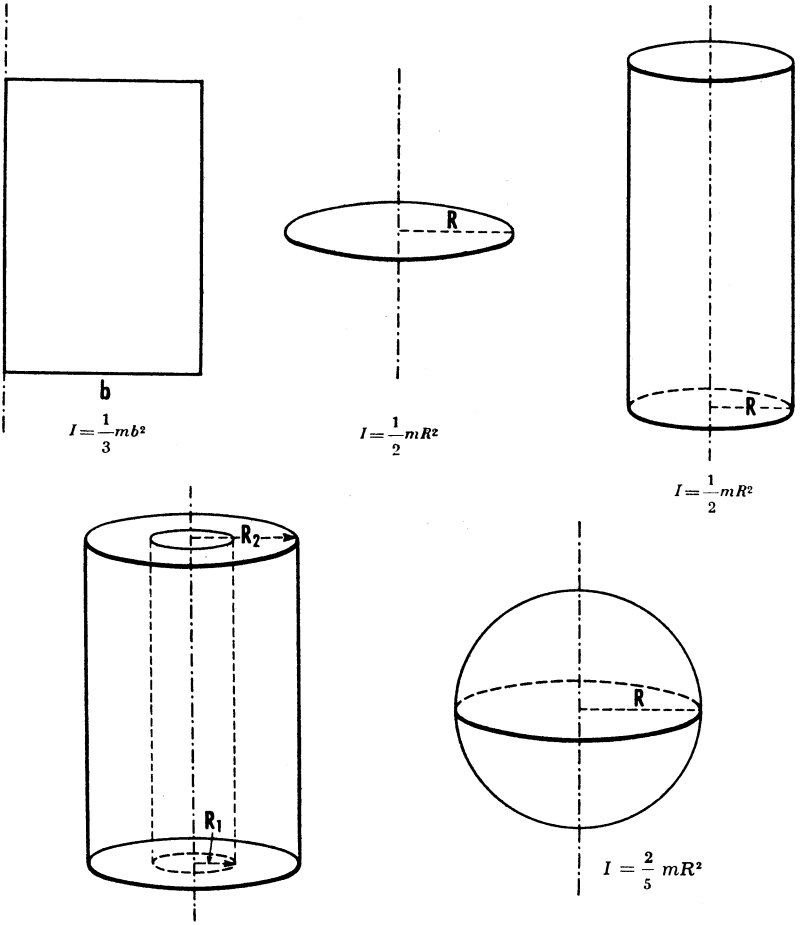


FIG. 67

Siempre que la masa del sólido pueda considerarse uniformemente distribuida en la periferia, a la misma distancia del eje, el momento de inercia vale el producto de la masa por el cuadrado de la distancia al eje. *Ejemplo:* una esfera hueca, de pequeño espesor, tiene un momento de inercia respecto a cualquier eje que pase por su centro igual al producto de su masa por el cuadrado del radio.

Las dimensiones del momento de inercia son

$$[I] = ML^2$$

se mide en $kg \cdot m^2$ o $g \cdot cm^2$ en el sistema M. K. S. y C. G. S. respectivamente.

Radio de giro. — Dados un cuerpo y un eje, hallamos su momento de inercia respecto al eje que vale I. Imaginemos toda la masa del cuerpo concentrada en un punto situado a una distancia del eje tal, que su momento de inercia respecto al eje es el mismo que el del cuerpo. A la distancia del punto al eje se le llama *radio de giro*. Para hallar el radio de giro escribimos:

$$m \cdot R^2 = I; \qquad R = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

R es, pues, el radio de giro del cuerpo respecto al eje considerado.

Ejemplo: El radio de giro de la varilla citada antes respecto el mismo eje vale

$$R = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} ml^2}{m}} = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Momento cinético e impulso angular. — Se llama momento cinético de un punto material que se mueve con cierta velocidad, respecto a un punto, al momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto. El momento cinético respecto a un eje es el momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho eje.

Supongamos un sólido rígido girando en torno de un eje. Consideremos al sólido formado por la agrupación de puntos materiales de masa m_i. La cantidad de movimiento de cada punto material vale $m_i \cdot v_i$, y su momento cinético respecto al eje de giro $m_i \cdot v_i \cdot r_i$, siendo r_i la distancia del punto al eje, que es la distancia al eje del vector velocidad, y por tanto de $\vec{mv}$. La velocidad de cada punto vale ωr_i. Luego el momento cinético de cada punto es $m_i \omega r_i^2$. El momento cinético total respecto al eje es la suma de los momentos cinéticos de cada punto; valdrá, pues:

$$M_c = \omega \Sigma m_i \cdot r_i^2$$

pero $\Sigma m_i r_i^2$ es el momento de inercia I respecto al eje considerado, luego

$$M_c = I\omega$$

Se llama *impulso angular* al producto del momento respecto al eje de las fuerzas aplicadas al sólido por el intervalo de tiempo t que actúa.

$$\text{Impulso angular} = M \cdot t$$

Recordemos la ecuación $M = I\alpha$; multiplicando por dt

$$M \cdot dt = I\alpha dt = Id\omega$$

integrando:

$$M \cdot t = I\Delta\omega = I(\omega - \omega_0) = I\omega - I\omega_0$$

(siendo ω_0 la velocidad angular en el instante de aplicar M, y ω la velocidad angular en al cabo del tiempo t).

El impulso angular es igual a la variación del momento cinético. Si el sólido estaba en reposo $\omega_0 = 0$, el impulso angular aplicado es igual al momento cinético al cabo del tiempo t.

Si no actúa ningún momento sobre un sólido que puede girar en torno de un eje, el momento cinético debe ser constante (conservación del momento cinético). Ejemplo: un patinador da vueltas sobre sí mismo con los brazos en cruz, sosteniendo en cada mano una bola de plomo. Al descender los brazos observamos que gira con más velocidad. Efectivamente, debe verificarse:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

como

$$I_1 > I_2 \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$$

debe ser $\omega_2 > \omega_1$.

En estas fórmulas se cumple la analogía dinámica entre movimientos de traslación y rotación citada anteriormente. El impulso angular es en la rotación análogo al impulso mecánico, sustituyendo la fuerza por el momento M. El momento cinético es análogo a la cantidad de movimiento, sustituyendo masa por momento de inercia, y velocidad lineal por angular.

Energía cinética de rotación. — Consideremos el sólido formado por puntos materiales, tal como lo hemos hecho anteriormente. La energía cinética de cada masa elemental vale

$$\tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$$

La energía cinética total vale

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Como ω es la misma para todos los puntos

$$E_c = \tfrac{1}{2} (\Sigma m_i r_i^2)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

La energía cinética de rotación es igual a la mitad del momento de inercia por el cuadrado de la velocidad angular. Aquí vemos también la analogía con la energía cinética de traslación. Basta sustituir masa por momento de inercia. y velocidad de traslación por velocidad angular.

La energía cinética total de un cuerpo que gira y se desplaza es igual a la suma de la energía cinética de rotación más la de traslación.

Por ser la energía cinética proporcional al momento de inercia, de dos ruedas de la misma masa y radio tiene mayor energía cinética la que tenga mayor la masa en la periferia, girando ambas con igual velocidad angular.

Trabajo en la rotación. — Una fuerza tangencial, al girar un ángulo $d\varphi$ su punto de aplicación, realiza un trabajo

$$d\mathfrak{T} = F \cdot ds = F \cdot r d\varphi = M d\varphi$$

Si el momento es constante,

$$\mathfrak{T} = M\varphi$$

Ejemplo: Supongamos un motor de potencia P. Vamos a calcular el momento de las fuerzas que producen el giro, que se llama *par motor*.

$$P = \frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \frac{M d\varphi}{dt} = M\omega; \quad M = \frac{P}{\omega}; \quad \text{como } \omega = 2\pi N, \quad M = \frac{P}{2\pi N}$$

ANALOGÍAS ENTRE ROTACIÓN Y TRASLACIÓN

Resumen sinóptico

Rotación	Traslación
I	m
α	a
M	F
$M = I\alpha$	$F = ma$
Mt	Ft
$I\omega$	mv
$Mt = I\Delta\omega$	$Ft = m\Delta v$
$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2$	$E_c = \frac{1}{2} mv^2$
$d\mathfrak{T} = M d\varphi$	$d\mathfrak{T} = F_t ds$

PRÁCTICAS

Medida de un momento de inercia *(ver págs. 128-129).*

CUESTIONES

1. *A un sólido que puede girar en torno de un eje, le aplicamos una fuerza cuya dirección corta al eje. ¿Girará el cuerpo?*

2. *Dos fuerzas situadas en un plano normal al eje de rotación de un cuerpo, constituyen un par que está aplicado al cuerpo y éste gira. ¿Modificaríamos la aceleración si desplazamos las fuerzas paralelamente a sí mismas en el plano que las contiene sin alterar su distancia mutua?*

3. *Citense casos en los cuales el radio de giro coincide prácticamente con la distancia del cuerpo al eje.*

4. *Una persona empuja una puerta giratoria, para entrar a un edificio y otra pretende salir empujando la misma puerta con igual fuerza que la anterior. ¿Hacia dónde gira la puerta? Discutir el resultado considerando el punto de aplicación de cada fuerza.*

5. *Atamos una cuerda a un cilindro y tiramos de ella con una fuerza constante. Estudiar el movimiento producido.*

6. *¿Interviene la fuerza centrífuga en la aceleración de un sólido que gira en torno de un eje?*

7. *Arrollamos una cuerda a un cilindro y tiramos de ella. Luego arrollamos la mitad y tiramos con la misma fuerza. ¿Es la misma la aceleración en los dos casos? ¿Y la velocidad angular después de haberse desarrollado la cuerda?*

8. *Un cilindro es hueco y otro macizo. Ambos tienen la misma masa y el mismo radio. Les arrollamos una cuerda a cada uno y tiramos con la misma fuerza. ¿Cuál de los dos gira con mayor aceleración?*

9. *Atamos un cuerpo de reducidas dimensiones (para evitar rozamiento con el aire) a un extremo de un cordel. El otro extremo lo sujetamos a una varilla, de modo que se pueda arrollar en ella. Comunicando un impulso al cuerpo, lo hacemos girar alrededor de la varilla. El hilo se va arrollando a medida que el cuerpo gira. ¿Es constante la velocidad angular del cuerpo?*

10. *Dos cuerpos de la misma masa avanzan con la misma velocidad de traslación. Uno de ellos va rodando. ¿Cuál de los dos tiene mayor energía?*

PROBLEMAS

1. Determinar el momento de inercia respecto su eje, de un cilindro de 4 cm de radio de la base y 50 cm de altura. Densidad 8 g/cm^3.

2. ¿Cuál es el radio de giro de una esfera respecto de un eje que pasa por su centro? (Radio de la esfera 2 m.)

3. A un sólido, que puede girar alrededor de un eje, le aplicamos un par de fuerzas de momento 10 newton·metro, cuya dirección coincide con la del eje. Siendo el momento de inercia del cuerpo respecto el eje $I = 50$ kg·m^2, determinar la aceleración angular. ¿Cuál será la velocidad angular al cabo de 3 segundos?

4. A un cilindro que puede girar alrededor de su eje, le aplicamos una fuerza tangencial de 25 kp. La masa del cilindro es de 10 kg y el radio 20 cm. ¿Cuál será la aceleración angular? Si la fuerza cesa al cabo de un minuto, ¿cuál será la velocidad angular de giro del cilindro en lo sucesivo?

5. Arrollamos una cuerda de 10 m de longitud, a un cilindro que puede girar en torno a su eje. La masa del cilindro es de 8 kg y su radio 10 cm. Tiramos del extremo de la cuerda con una fuerza de 40 newton. ¿Cuál será la velocidad angular una vez desarrollada la cuerda?

6. A una puerta de 5 kg y 1 m de ancha, le aplicamos normalmente a su centro una fuerza de 6000 dinas. ¿Cuánto tardará en dar un cuarto de vuelta?

7. A un disco de momento de inercia 40 kg·m^2 que gira dando 4 vueltas por segundo, lo frenamos aplicando una fuerza tangencial de 60 newton. ¿Cuánto tarda en pararse? El radio del disco es de 1 metro.

8. Al disco del problema anterior le aplicamos la misma fuerza tangencial en sentido contrario durante 4 segundos. ¿Cuál será su velocidad angular al cesar la fuerza?

9. Sobre una plataforma horizontal que puede girar alrededor de un eje vertical, cuyo momento de inercia, respecto al citado eje, vale 20 kg·m^2, colocamos un tren de juguete cuyas vías son circulares. El momento de inercia del tren, respecto al eje en torno del cual puede girar la plataforma y que pasa por el centro de las circunferencias determinadas por las vías, vale 0,5 kg·m^2. Al girar el tren con velocidad angular de 0,6 rad/s. ¿Cuál será la velocidad angular de la plataforma? Inicialmente estaban los dos en reposo.

10. Una varilla de momento de inercia 0,8 kg·m^2 puede girar alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Colocamos en la varilla dos aros de 0,5 kg cada uno, atados con un hilo fino de 20 cm de longitud y los colocamos simétricamente al eje de giro. Hacemos girar el conjunto con una velocidad angular constante de 0,6 rad/s. Se rompe el hilo y los aros salen fuera de la varilla. ¿Cuál es la velocidad angular de la varilla después de haber salido los aros?

11. ¿Cuál es la energía cinética de rotación de la Tierra? Puede tomarse la densidad media de la Tierra 5,5 g/cm^3 y el radio 6400 km.

12. Una esfera de radio 4 cm y masa 2 kg, cae rodando por un plano inclinado 30° Calcular su energía cinética, así como las velocidades de rotación y traslación, después de haber recorrido 3 m a lo largo del plano. Se supone que ha partido del reposo.

13. Un motor de 8 CV gira a 3000 revoluciones por minuto. Calcular el par motor.

Nota. — En estos problemas se desprecia el rozamiento.

CAPÍTULO VII

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Leyes de Kepler. — Las leyes del movimiento de los planetas fueron estudiadas por Kepler basándose en observaciones astronómicas realizadas por Tycho-Brahe. Dedujo empíricamente las siguientes leyes:

1.ª *La trayectoria de cada planeta es una elipse en uno de cuyos focos se halla el Sol.*

2.ª *Las áreas barridas por el radio vector que une un planeta con el Sol son iguales en tiempos iguales.*

3.ª *Los cuadrados de los tiempos empleados en describir una órbita completa son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de las órbitas.*

Con estas leyes se puede estudiar el movimiento de los planetas desde el punto de vista dinámico.

Deducción de la ley de Newton. — Para deducir la ley de Newton de una manera elemental, supondremos órbitas circulares. Consideramos al planeta como un punto que recorre una circunferencia, cuyo centro es el Sol, con velocidad angular constante (en este caso cumple la ley de las áreas). Estará sometido a una aceleración centrípeta dirigida hacia el centro, es decir, hacia el Sol, que vale

$$a_n = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

Según la tercera ley, debe verificarse que

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{R^3}{R'^3}; \qquad \frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} = \text{constante}$$

luego,

$$T^2 = R^3 \cdot \text{constante}: \qquad a_n = \frac{4\pi^2}{R^3 \cdot \text{cte.}} R = \frac{k}{R^2}$$

y la fuerza

$$F = m a_n = k \frac{m}{R^2}$$

o sea que la fuerza está dirigida hacia el Sol, y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia planeta-Sol. Por la ley de acción y reacción existe una fuerza del mismo módulo, pero dirigida hacia el planeta. podemos escribir:

$$\text{siendo} \begin{cases} m_1 = \text{masa del planeta} \\ m_2 = \text{masa del Sol} \end{cases}$$

$$F = k_2 \frac{m_1}{R^2} = k_1 \frac{m_2}{R^2}; \qquad k_2 m_1 = k_1 m_2$$

La constante k_2 sólo depende de la masa del Sol, y la k_1 sólo de la masa del planeta; luego, k_2 es proporcional a m_2, y k_1 es proporcional a m_1;

$$k_1 = G m_1; \qquad k_2 = G m_2$$

Sustituyendo el valor de k_1 o el de k_2 en la fórmula anterior, obtenemos:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

que es la ley de Newton que dice:

Dos cuerpos se atraen en razón directa del producto de sus masas, y en razón inversa del cuadrado de su distancia.

A la constante de proporcionalidad G se le llama *constante de la gravitación.* El valor de dicha constante, que puede determinarse experimentalmente, es: $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ newton$\cdot$m^2/kg^2.

Este valor es muy pequeño, y es por lo que no apreciamos atracciones entre cuerpos de poca masa. Dos masas de un kilogramo separadas un metro se atraen mutuamente con una fuerza de $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ newton.

Campo gravitatorio terrestre. — Una masa m situada a la distancia r del centro de la Tierra, está sometida a una fuerza dirigida hacia el centro de la Tierra, y cuyo módulo vale

$$F = G \frac{m_T \cdot m}{r^2}$$

siendo m_T la masa de la Tierra. Colocada la masa m en distintos puntos, actuarían sobre ella fuerzas distintas, que dependen de la distancia del punto al centro de la Tierra. A cada punto le corresponde un vector fuerza. Decimos entonces que existe un campo de fuerzas, que en este caso se llama *campo gravitatorio terrestre.* Se llama *intensidad de la gravedad* a la fuerza por unidad de masa y se mide en newton/kg o dina/g.

El valor de la intensidad de la gravedad en un punto situado a la distancia r del centro de la Tierra vale

$$g = G \frac{m_T}{r^2}$$

si está sobre la superficie terrestre

$$g_0 = G\frac{m_T}{R^2}$$

es constante (R = radio terrestre).

A la fuerza que actúa sobre la masa se le llama *peso*. Recordando el concepto dinámico de peso, deducimos que siendo la intensidad de la gravedad la fuerza por unidad de masa, coincide numéricamente con la aceleración debida a la gravedad

$$g = \frac{P}{m}$$

Podemos determinar las variaciones de la aceleración de la gravedad con la altura:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\frac{m_T}{R^2} \\ g &= G\frac{m_T}{(R+h)^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{g_0}{g} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^2; \qquad g = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

Ejemplo: Un cuerpo en la superficie terrestre pesa P_0 kp. ¿A qué altura pesará la cuarta parte?

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= mg_0 \\ P &= mg \end{aligned}\right\} \quad \frac{P_0}{P} = \frac{g_0}{g} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^2$$

$$\frac{P_0}{P} = 4 = \left(1+\frac{h}{R}\right)^2; \qquad 2 = 1+\frac{h}{R}; \qquad h = R$$

Un cuerpo sobre la superficie terrestre está sometido a la fuerza de atracción de la Tierra y a la fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre. La gravedad será la resultante de las dos fuerzas. Esto explica la variación de la gravedad con la latitud. En el Ecuador la fuerza centrífuga se opone a la atracción terrestre y es donde la fuerza centrífuga tiene mayor valor, luego la gravedad es donde tiene el valor menor: $g = 9{,}78$ m/seg.^{2}. En los polos la fuerza centrífuga es nula, además, debido al achatamiento de la Tierra en los polos, la atracción es mayor, y por lo tanto mayor aún la gravedad. En los polos la gravedad vale: $g = 9{,}832$ cm/seg.^{2} El valor normal de la aceleración de la gravedad es la de un lugar situado al nivel del mar a una latitud de 45°. Su valor es $g = 9{,}80616$ m/seg.^{2} En la práctica se toma $g = 9.8$ m/seg.^{2} Hay que tener presente que los cuerpos de igual masa tienen un peso que varía con la latitud (antes hemos visto que varía con la altitud).

Existen variaciones de g locales, debidas a yacimientos minerales u otras causas. Determinando experimentalmente las variaciones locales de g, podemos conocer la existencia de yacimientos mineros. En esto se basa la *prospección gravimétrica.*

Ejemplos de variación del peso con g en distintos lugares de la Tierra.

Una masa de 10 kg, ¿cuánto pesa en kp en los siguientes lugares?:

1.° En el polo ($g = 9{,}832$): $P_1 = 10 \cdot 9{,}832$ newton $= \dfrac{98{,}32}{9{,}806}$ kp $= 10{,}0269$ kp.

2.° En Barcelona ($g = 9{,}802$): $P_2 = 10 \cdot 9{,}802$ newton $= \dfrac{98{,}02}{9{,}806}$ kp $= 9{,}99705$ kp

3.° En un lugar en que $g = 9{,}806$: $P_3 = 10 \cdot 9{,}806$ newton $= 10$ kp.

Problema: Calcular la masa de la Tierra y su densidad media.

Sabiendo que $g_0 = 9{,}806$ m/s^2; $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ newton$\cdot$m^2/kg^2; $R = 6370$ km.

$$g_0 = G\frac{m_T}{R^2};$$

$$m_T = \frac{g_0 R^2}{G} = \frac{9{,}806 \cdot (6\,370\,000)^2}{6{,}7 \cdot 10^{-11}} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg};$$

$$d_m = \frac{m_T}{V} = \frac{g_0 R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3 G} = \frac{3g_0}{4\pi RG} = \frac{3 \cdot 9{,}806}{4\pi \cdot 6\,370\,000 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11}} = 5500 \text{ kg/m}^3;$$

$$d_m = 5500 \text{ kg/m}^3 = 5{,}5 \text{ g/cm}^3$$

Si un cuerpo gira en torno de la Tierra (un satélite) con una velocidad v, debe verificarse que la fuerza atractiva sea igual a la fuerza centrífuga. Es decir:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2} = gm; \qquad \frac{v^2}{r} = g = g_0\frac{R^2}{r^2}$$

$$v^2 = g_0\frac{R^2}{r}; \qquad v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}; \qquad \omega = \frac{v}{r}; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ejemplo: Un satélite artificial, describe una órbita circular en torno a la Tierra, con una velocidad lineal de 6370 m/s. Determinar la altura sobre la superficie terrestre y el período de rotación.

$$r = \frac{g_0 R^2}{v^2} = g_0\left(\frac{R}{v}\right)^2 = 9{,}8\left(\frac{6\,370\,000}{6370}\right)^2 = 9{,}8 \cdot 10^6 \text{ m} = 9800 \text{ km}.$$

$$h = r - R = 9800 - 6370 = 3430 \text{ km}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 9{,}8 \cdot 10^6}{6370} = 9663 \text{ seg.} = 2^{\text{h}}\ 41^{\text{mn}}\ 3^{\text{s}}.$$

PRÁCTICAS

Medida de *g* *(ver págs. 129-130).*

CUESTIONES

1. *¿Qué tipo de leyes son las de Kepler?*
2. *¿Qué ocurriría si la densidad media de la Tierra fuese doble?*
3. *¿Cómo podríamos calcular el valor de G?*
4. *¿Tiene sentido hablar de peso de la Tierra?*
5. *¿Dos cuerpos de la misma masa pesan lo mismo en cualquier lugar?*
6. *¿La masa de un cuerpo variaría al ser trasladada a la Luna?*
7. *¿Qué ocurriría si un planeta se parase?*
8. *¿Qué le ocurre a un satélite artificial cuando pierde velocidad?*

PROBLEMAS

1. Dos bolas de plomo de masas 60 y 80 kg, están situadas de forma que sus centros distan 2 m. ¿Cuál es su fuerza atractiva?

2. La distancia Tierra-Luna es de 384 400 km; la relación de masas Tierra-Luna es 81. Determinar en qué punto de la recta que une sus centros la atracción es la misma.

3. Calcular la aceleración de la gravedad en la superficie lunar. Datos: Relación del radio de la Luna/radio de la Tierra = 0,27; relación de masas 81.

4. Basándonos en el problema anterior, calcular el peso en la Luna de un proyectil que en la tierra pesa 600 kp. (Se desprecia la acción de la fuerza centrífuga.)

5. Un avión pesa 6000 kp en la superficie terrestre. Cuánto pesa a una altura de 15 km?

6. Un satélite artificial describe una órbita circular en torno de la Tierra. Sabiendo que su altura sobre la superficie terrestre es de 1600 km, determinar la velocidad y el período.

7. Un cuerpo en el Ecuador ($g = 9{,}78$ m/s^2) pesa 40 kp. ¿Cuánto pesará en París ($g = 9{,}81$ m/s^2)?

CAPÍTULO VIII

MOVIMIENTO ARMÓNICO: PÉNDULO

En el Capítulo II estudiamos la cinemática del movimiento armónico simple. Vamos a considerar la dinámica de dicho movimiento.

Dinámica del movimiento armónico simple. — Al estudiar el movimiento armónico simple vimos que se caracterizaba por ser su aceleración proporcional a la distancia y dirigida en sentido contrario al movimiento. Es decir, $a = -\omega^2 x$. Supongamos que la masa del móvil vale m; la fuerza que actúa sobre dicha masa es

$$F = m \cdot a = -m\omega^2 x = -k \cdot x$$

Siempre que un móvil esté sometido a una fuerza proporcional a la distancia a un punto fijo y dirigida hacia él, el movimiento será armónico simple.

Supongamos un muelle con un extremo fijo. Al tirar del otro extremo, la fuerza necesaria para deformarlo es proporcional al alargamiento. Experimentalmente vemos que la fuerza realizada aumenta con el alargamiento. Soltando el extremo libre, el muelle recobra su antigua posición, por el hecho de estar sometido a la reacción, igual y en sentido contrario, a la fuerza a la que estaba sometido. Una vez alcanzado el punto, continúa con movimiento oscilatorio de centro la posición inicial La fuerza que produce el movimiento es proporcional a la distancia y dirigida a un punto fijo. El movimiento es armónico simple. El muelle efectúa oscilaciones cuyo período vamos a determinar. Podemos escribir: $F = -k \cdot x$ (siendo x el alargamiento); comparando con la ecuación $F = -m \cdot \omega^2 x$ vemos que la constante k vale $k = m\omega^2$; recordando que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, y siendo $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \text{la frecuencia} \quad N = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A k se le llama *constante recuperadora;* sus dimensiones son fuerza/longitud (en la práctica, este movimiento es *amortiguado;* al cabo de cierto tiempo cesaría el movimiento).

Problema. Tirando con la fuerza de 2,5 kp del extremo de un muelle, éste se alarga 1 cm. Determinar la frecuencia de la oscilación del muelle cuando le colgamos una masa de 1 kg en un extremo, manteniendo el otro fijo.

$$F = 2{,}5 \cdot 9{,}8 \text{ newton}; \qquad x = 0{,}01 \text{ m}; \qquad m = 1 \text{ kg}$$

$$k = \frac{F}{x} = \frac{2{,}5 \cdot 9{,}8}{0{,}01} = 25 \cdot 98 \text{ newton/m}$$

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{25 \cdot 98}{1}} = 7{,}885 \text{ oscilaciones/s}.$$

Energía de un movimiento armónico — Una masa m se mueve con movimiento armónico de ecuación $x = R$ sen ωt; la velocidad es $v = R\omega$ cos ωt. La energía cinética de m

$$E_c = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} mR^2\omega^2 \cos^2 \omega t$$

es función periódica de tiempo.

Péndulo simple. — Un péndulo simple o matemático consta de un punto material, suspendido de un punto fijo por medio de un hilo inextensible y sin masa. Una pequeña plomada constituye aproximadamente un péndulo simple. La posición de equilibrio es la vertical. Si desplazamos la masa del péndulo de su posición de equilibrio manteniendo el hilo tenso, al soltarla observamos que el péndulo regresa a su posición inicial y no se detiene hasta ocupar una posición simétrica, respecto a la vertical, a la ocupada al ser desplazada; luego vuelve en sentido contrario, hasta que se para, teóricamente, en la posición donde lo habíamos desplazado inicialmente, y así sucesivamente continúa el movimiento. Este movimiento pendular es periódico y oscilatorio. Debido al rozamiento, la amplitud de las oscilaciones decrece, y transcurrido cierto tiempo el péndulo se para.

Galileo determinó experimentalmente las leyes del péndulo simple. Llegó a la conclusión de que *el período de un péndulo sólo depende de la longitud del hilo; es independiente de la masa del punto material que pende del hilo y de la amplitud de las oscilaciones, si ésta es pequeña.*

Dinámica de las pequeñas oscilaciones. — Sobre el punto material que pende del hilo actúa la fuerza peso mg (fig. 68), que puede descomponerse en una componente F' en la dirección del hilo y en la F normal a la anterior, que es la que produce el movimiento (ya que la F' se anula por la reacción del punto de suspensión A). Considerando el triángulo determinado por F y mg, el valor de F es: $F = mg$ sen φ.

Para pequeñas oscilaciones, el ángulo es pequeño y sen $\varphi \simeq \varphi = \frac{\widehat{PO}}{l}$.

Llamando x a $\widehat{PO}$ y teniendo presente que la fuerza está dirigida hacia O, escribimos

$$F = -mg\frac{x}{l} = -kx$$

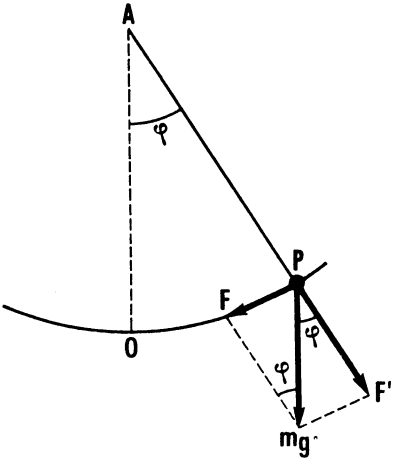


FIG. 68

el movimiento es armónico simple; ω vale:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{ml}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

de aquí deducimos las leyes del péndulo simple citadas antes. Debemos añadir que el período del péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad del lugar donde oscila.

Movimiento armónico de rotación. — Se dice que un sólido efectúa un

movimiento armónico de rotación en torno de un eje fijo cuando el ángulo girado es función sinusoidal del tiempo. Su ecuación será

$$\varphi = \varphi_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$$

Observemos la analogía con el movimiento armónico simple. Basta sustituir distancia por ángulo.

Vamos a aplicar la ecuación general del movimiento de rotación en torno de un eje fijo:

$$M = I\alpha = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

derivemos respecto al tiempo la ecuación $\varphi = \varphi_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \varphi_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t = -\frac{4\pi^2}{T^2} \varphi$$

sustituyendo en la ecuación $M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$,

$$M = -\frac{4\pi^2}{T^2} I\varphi = -k\varphi; \qquad M = -k\varphi$$

Un sólido efectúa un movimiento armónico de rotación en torno de un eje fijo cuando el momento de las fuerzas aplicadas es proporcional al ángulo girado y se opone al sentido de la rotación.

Siendo

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{4\pi^2}{T^2} I \\ T^2 &= 4\pi^2 \frac{I}{k} \end{aligned}\right\} \text{ el período } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$

Péndulo físico. — Un péndulo físico o compuesto es un sólido rígido que puede girar alrededor de un eje fijo horizontal.

Sea el péndulo representado en la figura 69. El eje de rotación es perpendicular al plano de la figura en O. A este punto O se le llama *centro de suspensión*. El centro de gravedad está en G, y la distancia de G a O es δ. La línea de acción del peso mg pasa por G, y su momento respecto al eje de rotación vale $-mg\delta \operatorname{sen} \varphi$. El signo menos expresa que el momento se opone al aumento de φ.

Escribimos $M = -mg\delta \operatorname{sen} \varphi$; para pequeñas oscilaciones:

$$M \simeq -mg\delta\varphi = -k\varphi$$

siendo $k = mg\delta$.

El movimiento de rotación es armónico y, según se ha visto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\delta}}; \quad \text{poniendo} \quad \lambda = \frac{I}{m\delta}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

El período sería el mismo que el de un péndulo simple que tuviese una longitud $l = \lambda = \frac{I}{m\delta}$. A esta longitud λ se le llama *longitud reducida* del péndulo físico.

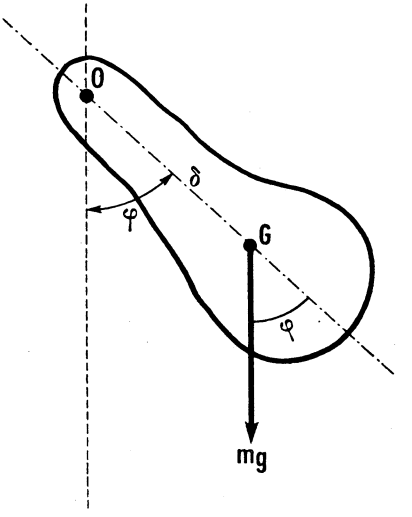


FIG. 69

Problema. Una varilla de 30 cm de longitud se suspende de un punto, situado en un extremo, de forma que pueda oscilar en torno de un eje horizontal que pasa por dicho punto. ¿Cuál es la longitud reducida del péndulo físico así formado?

$$\lambda = \frac{I}{m\delta}; \quad I = \frac{1}{3}ml^2; \quad \delta = \frac{l}{2}; \quad \lambda = \frac{\frac{1}{3}ml^2}{m\frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l = 20 \text{ cm}$$

Centro de oscilación. — Se llama *centro de oscilación* a un punto situado en la prolongación de la recta *OG* que dista del eje de rotación una distancia λ igual a la longitud reducida del péndulo físico. Si imaginamos toda la masa del péndulo concentrada en el centro de oscilación, consti-

tuiría un péndulo simple cuyo período sería el mismo que el del péndulo físico (ya que su longitud sería $l = \lambda$).

Supongamos un péndulo físico (fig. 70, *a*) que puede oscilar alrededor de un eje fijo que pasa por *O* perpendicular al plano del dibujo. Las oscilaciones se efectúan en el plano del papel. Llamemos δ_1 a la distancia de *G* a *O*. La longitud reducida del péndulo es

$$\lambda = \frac{I}{m\delta_1}$$

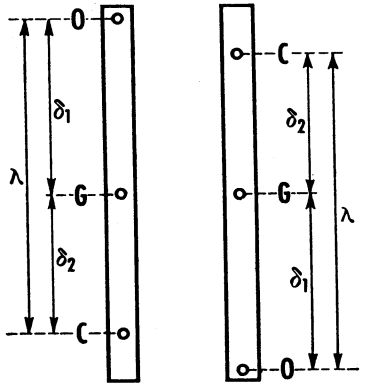


FIG. 70

Conocido el momento de inercia respecto un eje que pasa por el centro de gravedad, si queremos calcularlo respecto un eje que pasa por *O* y paralelo al primero, aplicaremos el teorema de Steiner (pág. 105):

$$I = I_G + m\delta_1^2; \quad \text{luego} \quad \lambda = \frac{I_G + m\delta_1^2}{m\delta_1} = \frac{I_G}{m\delta_1} + \delta_1$$

Suspendemos el péndulo de otro punto *C*, de forma que el período sea el mismo que antes (fig. 70 *b*). Debe verificarse que la longitud reducida sea la misma: $\lambda_2 = \lambda_1$.

$$\lambda_2 = \frac{I}{m\delta_2} = \frac{I_G + m\delta_2^2}{m\delta_2} = \frac{I_G}{m\delta_2} + \delta_2$$

luego

$$\frac{I_G}{m\delta_2} + \delta_2 = \frac{I_G}{m\delta_1} + \delta_1$$

$$\frac{I_G}{m\delta_2} - \frac{I_G}{m\delta_1} = \delta_1 - \delta_2; \quad \frac{I_G}{m}\left(\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1}\right) = \delta_1 - \delta_2; \quad \frac{I_G}{m}\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_2\delta_1} = \delta_1 - \delta_2 .$$

simplificando

$$\frac{I_G}{m}\frac{1}{\delta_2\delta_1}=1\,; \qquad \frac{I_G}{m}=\delta_1\delta_2$$

sustituyendo $\frac{I_G}{m}$ en cualquiera de las fórmulas que nos dan λ tenemos

$$\lambda=\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1}+\delta_1=\delta_2+\delta_1=OC$$

de aquí deducimos que la distancia OC es la longitud reducida del péndulo físico, por tanto C es el centro de oscilación.

Problema. — Suspendemos un disco, de radio $R=20$ cm, de un punto de su periferia, de forma que pueda oscilar en torno de un eje horizontal perpendicular al plano del disco. ¿A qué distancia del centro del disco está el centro de oscilación C?

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{I}{m\delta}\,; \quad I=I_G+mR^2=\dfrac{1}{2}mR^2+mR^2=\dfrac{3}{2}mR^2 \\ I_G=\dfrac{1}{2}mR^2\,; \qquad \delta=R\end{array}\right\} \lambda=\frac{\frac{3}{2}mR^2}{mR}=\frac{3}{2}R$$

la distancia x del centro a C será

$$x=\lambda-R=\frac{3}{2}R-R=\frac{1}{2}R=10 \text{ cm}$$

Para determinar experimentalmente la longitud reducida y por tanto el centro de oscilación, se utiliza un péndulo que se pueda suspender por distintos puntos. Se suspende de uno de ellos y se hace oscilar. Se invierte, suspendiéndolo de otro punto hasta que el período sea igual al primero. (Véase prácticas.) La distancia entre estos dos puntos es la longitud reducida, y por tanto, cuando el primero es el centro de suspensión, el segundo es el de oscilación y viceversa.

Para evitar tener que suspenderlo de distintos puntos se utiliza un péndulo muy conocido, llamado péndulo reversible de *Kater* (fig. 71). Consiste en un péndulo metálico, que lleva dos cuchillas en O y en C, de forma que apoyando una cuchilla en una superficie lisa, pueda oscilar alrededor de su arista. Por construcción, la distancia entre las aristas de las cuchillas es aproximadamente la longitud reducida, de forma que si lo suspendemos de O, el período es aproximadamente el mismo que cuando suspendemos de C. Para lograr la igualdad de los dos períodos se modifica el momento de inercia desplazando las masas m_1 y m_2. La m_1 es mayor y se desplaza moviéndola a lo largo de la barra

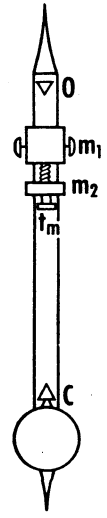


FIG. 71

después de aflojar un tornillo de sujeción. La m_2 se desplaza respecto la primera por medio de un tornillo micrométrico t_m. De esta forma, desplazando las masas podemos lograr que los períodos en los dos casos sean iguales. La distancia entre cuchillas será la longitud reducida. (Para aplicaciones véase prácticas).

Centro de percusión. —Llamaremos *percusión* al impulso de una fuerza que actúa sobre un cuerpo durante un tiempo tan pequeño, que el desplazamiento del cuerpo es despreciable mientras actúa la fuerza. Esto ocurre en el choque.

Si a un cuerpo rígido que puede girar en torno de un eje le aplicamos una percusión, ésta repercute en todos los puntos del cuerpo, a no ser que la dirección de la fuerza pase por el centro de oscilación, considerado el cuerpo como péndulo físico. Al centro de oscilación en este caso, se le llama *centro de percusión*, y se caracteriza porque la acción de la percusión no se transmite al eje de rotación (o eje de suspensión).

Como ejemplo tenemos un martillo. El eje de suspensión está en la parte del mango donde se sujeta. Al golpear un clavo, no notamos el efecto si lo sujetamos por el extremo. Es debido a la forma que tiene la cabeza del martillo, pues el centro de percusión relativo al eje de suspensión está situado en la parte donde golpeamos. Si tomamos el mango por su punto medio, por ejemplo, notaremos el efecto de los golpes, y si lo sujetamos más cerca de la cabeza aún los notaremos más. Es debido a que el centro de percusión relativo al nuevo eje de suspensión no está situado en el mismo lugar que antes.

Otra aplicación es el *péndulo balístico*. Es un péndulo físico, al cual disparamos un proyectil dirigido al centro de percusión. El péndulo gira un cierto ángulo. Conocida la longitud reducida del péndulo, las masas del péndulo del proyectil y el ángulo girado, podemos determinar la velocidad del proyectil. Para que el choque sea inelástico, el péndulo consta de un cilindro lleno de arena, donde el proyectil quedará detenido. Está suspendido de un punto por una varilla metálica.

PRÁCTICAS

Comprobacion de las leyes del péndulo. — Colgamos un pequeño cuerpo (una bola de plomo o una pesa pequeña), con un hilo fino y resistente, de un punto fijo para que el péndulo así formado pueda oscilar. Tenemos un péndulo, que aproximadamente cumplirá las leyes del péndulo simple. Con un cronómetro, determinamos el tiempo que tarda en efectuar un cierto número de pequeñas oscilaciones. Dividiendo el tiempo por el número de oscilaciones, obtenemos el período. Sustituimos el cuerpo por otro, manteniendo constante la longitud del hilo. Determinamos de nuevo el período, comprobando que es el mismo que antes. Repetimos varias veces cada determinación y tomamos el promedio para evitar errores accidentales.

Con el péndulo anterior, determinaremos el período, para distintas longitu-

des del hilo. Comprobaremos que los períodos son proporcionales a las raíces cuadradas de las longitudes o bien que los cuadrados de los períodos son proporcionales a las longitudes.

Podemos realizar la comprobación gráfica. Dibujamos dos ejes coordenados y tomamos en abscisas las longitudes de los péndulos y en ordenadas los cuadrados de los correspondientes períodos. Uniendo los puntos obtenidos debe resultar una recta.

Realización de un péndulo reversible. — A una barra rectangular de un metro de largo le practicamos orificios equidistantes a lo largo de su eje vertical de simetría (fig. 72). Tomaremos como eje de suspensión un clavo delgado hori-

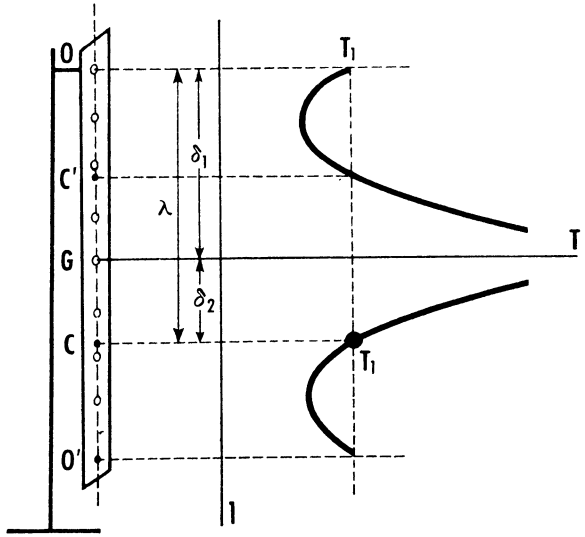


FIG. 72

zontal sujeto a un soporte, de forma que al introducirlo en uno de los agujeros, la barra oscile como un péndulo compuesto. Podemos lubricar dicho eje con un poco de aceite, para evitar rozamientos y lograr que el amortiguamiento sea débil. Medimos cuidadosamente las distancias de cada agujero al centro de gravedad *G* (que será el centro de la barra). Hacemos oscilar el péndulo, de modo que las oscilaciones sean de pequeña amplitud y determinamos el período (por el procedimiento seguido anteriormente para el péndulo simple) para cada posición del eje de suspensión. Representamos gráficamente los valores del período, en función de las distancias de cada eje de suspensión al centro de gravedad y obtenemos la curva representada en la misma figura. Para determinar la longitud reducida, trazamos una recta paralela al eje de abscisas, desde el punto de la curva correspondiente a una determinada distancia del eje de suspensión (por ejemplo el primero de la parte superior). Dicha paralela corta a la curva de la derecha, en un punto, para el cual el período es el mismo que cuando estaba suspendido en *O*. Este punto situado a la distancia δ_2 de *G*, nos dará el centro

de oscilación C. La distancia OC es la longitud reducida del péndulo físico. Si lo colgamos de O' el centro de oscilación es C', smiétrico del anterior respecto G.

NOTA. — En la figura, observamos un mínimo en cada rama simétrica de la curva, que representa la variación de T en función de δ.

Podemos determinar este mínimo por cálculo.

Como $T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, siendo 2π y g constantes podemos determinar el mínimo de λ, que corresponderá al mínimo de T

$$\lambda = \frac{I_G + m\delta^2}{m\delta} = \frac{I_G}{m\delta} + \delta; \qquad I_G \text{ es constante}$$

Como δ es variable le llamaremos x. Así $\lambda = \frac{I_G}{mx} + x$,

Derivando respecto a x

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{I_G}{mx^2} + 1 = 0$$

según la condición de mínimo o máximo.

Luego

$$mx^2 = I_G; \qquad x = \sqrt{\frac{I_G}{m}}$$

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{2I_G}{mx^3} > 0 \text{ si } x > 0 \text{ es mínimo}$$

tomando el sentido positivo de G a O se está entre G y O.

Si el péndulo consiste en una barra rectangular,

$$I_G = \frac{1}{12} ml^2$$

$$x = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} ml^2}{m}} = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Colgando la barra de O' hallaríamos el mínimo entre G y O'. Si el péndulo oscilase alrededor de un eje horizontal, que pase el punto hallado anteriormente, el período sería mínimo y por tanto la frecuencia de la oscilación máxima.

PRÁCTICAS

(*correspondientes al* CAPÍTULO VI)

Medida de un momento de inercia. — Supongamos un cuerpo homogéneo del cual conocemos su masa y su centro de gravedad. Lo colgamos de un extremo, de modo que pueda oscilar como péndulo compuesto. Si queremos determinar su momento de inercia respecto un eje que pase por su centro de gravedad y de cierta dirección, operaremos de la siguiente forma:

El cuerpo se suspende, de modo que pueda oscilar en torno de un eje horizontal paralelo al eje respecto al cual queremos determinar el momento de

inercia. Determinaremos el período para pequeñas oscilaciones. Aplicamos la fórmula del péndulo compuesto.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\delta}}; \quad I = I_G + m\delta^2$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I_G + m\delta^2}{mg\delta}; \quad I_G + m\delta^2 = \frac{mg\delta T^2}{4\pi^2}$$

$$I_G = \frac{mg\delta T^2}{4\pi^2} - m\delta^2 = m\delta \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - \delta \right)$$

$$I_G = m\delta \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - \delta \right)$$

Ejemplo: Hallar el momento de inercia de una tabla rectangular de 1 kg y 0,5 m de base, respecto un eje que pase por su centro y paralelo a la altura.

Colgada la tabla de uno de sus lados paralelos a la altura, puede oscilar en torno de un eje paralelo al que nos interesa. El período resulta ser 1,16 seg.

$$\delta = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 \text{ m}; \quad I_G = 1 \cdot 0{,}25 \left(\frac{9{,}8 \cdot 1{,}16^2}{4\pi^2} - 0{,}25 \right) = 0{,}0208 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para facilitar la realización práctica, en el caso de la tabla, pueden colocarse dos pequeños aros en los extremos del lado de la tabla que coincide con el eje, introduciendo en los aros una varilla, que será el eje de rotación.

Si queremos el momento de inercia respecto el eje de rotación, basta despejar de la fórmula $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\delta}}$,

$$I = \frac{mg\delta T^2}{4\pi^2}$$

PRÁCTICAS

(*correspondientes al* CAPÍTULO VII)

Medida de g. — Si disponemos de un péndulo reversible, como el citado anteriormente, hallaremos su longitud reducida. Determinamos su período y aplicaremos la fórmula del péndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\lambda}{g}$$

de aquí despejamos g

$$g = 4\pi^2 \frac{\lambda}{T^2}$$

Caso de disponer del péndulo reversible de Kater (citado en teoría), primero determinaremos el período cuando está suspendido por una cuchilla. Para que el error sea menor, se cuentan muchas oscilaciones midiendo el tiempo que ha transcurrido, dividiendo el tiempo por el número de oscilaciones. Se repite la operación cuando lo invertimos suspendiéndolo por la otra cuchilla. Si los períodos no concuerdan, se modifica la posición de las masas m_1 y m_2. Se repite la operación hasta que los períodos coincidan. Sea T el período común a las dos posiciones.

Basta medir la distancia entre las aristas de las cuchillas, para tener la longitud reducida y de aquí calcular g por la fórmula

$$g = 4\pi^2 \frac{\lambda}{T^2}$$

Las medidas de precisión requieren muchas correcciones.

Péndulo de Kater

CUESTIONES

1. *Colgamos un peso de un resorte y éste oscila con cierto período. Si le colgamos un peso mayor, ¿aumenta o disminuye el período?*

2. *Dos puntos materiales de la misma masa se mueven con movimiento armónico simple de la misma amplitud y período distintos. ¿Cuál de los dos tiene mayor energía cinética?*

3. *De dos hilos finos de la misma longitud, cuelgan dos pequeñas bolas de distinta masa. Las hacemos oscilar, de forma que las oscilaciones sean de pequeña amplitud. ¿Son iguales los períodos?*

4. *Dos lámparas están suspendidas del techo de una catedral por medio de cuerdas de distinta longitud. ¿Cuál de las dos oscila con mayor período?*

5. *Al trasladar un péndulo del Ecuador a otro lugar de la Tierra. ¿Aumenta o disminuye el período?*

6. *¿Qué le ocurre al período de un péndulo al trasladarlo a la cima de una montaña?*

7. *¿Un reloj de péndulo adelanta o atrasa en invierno?*

8. *Un cuerpo puede girar en torno de un eje horizontal que pasa por su centro de gravedad. ¿Oscilará el cuerpo?*

9. *Una varilla homogénea, de sección constante, la hacemos oscilar suspendiéndola de un extremo. ¿El período de las oscilaciones depende de la sección de la varilla?*

10. Tenemos dos esferas de la misma masa y el mismo radio, una hueca y otra maciza. Las suspendemos por medio de hilos de la misma longitud, de un eje horizontal, de forma que puedan oscilar como péndulos físicos. ¿Cuál de las dos oscila con mayor período?

PROBLEMAS

1. Un punto material de masa 200 g efectúa un movimiento armónico simple de período 1/20 s. ¿Cuál es el valor de la fuerza causa del movimiento cuando el punto dista 1 cm del centro de oscilación?

2. Un punto material oscila con un período de 1/50 s. La amplitud del movimiento armónico es de 10 cm y la energía cinética máxima vale 0,4 julios. Determinar la masa del punto.

3. Un péndulo simple tiene una longitud de 10 m. ¿Cuál es su período en el Ecuador ($g = 9{,}78$ m/s^2) y en Madrid ($g = 9{,}80$ m/s^2)?

4. El período de un péndulo simple es 1 seg. en un lugar en que $g = 9{,}80$ m/seg.^{2} Lo hacemos oscilar en otro lugar en que $g = 9{,}83$ m/seg.^{2} ¿Cuánto adelantará en un día?

5. Un péndulo simple que oscila con un período de 1 s, en un lugar en que $g = 9{,}8$ m/s^2, se enfría y adelanta 2 s en 4 minutos. ¿En cuánto ha disminuido su longitud?

6. Una varilla de 1 m de longitud se suspende de un extremo para que pueda oscilar como péndulo físico. ¿Cuál es su período en un lugar en que $g = 9{,}8$ m/s^2?

7. A la varilla del problema anterior, la hacemos oscilar en torno de un eje que pasa por un punto que dista 20 cm del mismo extremo. Hallar su longitud reducida y el centro de oscilación.

8. Suspendemos una esfera homogénea por un punto de su superficie, de forma que pueda oscilar como péndulo compuesto. Determinar la posición del centro de oscilación, sabiendo que el radio es de 40 cm.

9. Suspendemos de un punto una pequeña esfera de plomo con un hilo de 1 m de longitud. A continuación, colgamos otra pequeña esfera de la misma masa a 20 cm de la anterior. Despreciando la masa del hilo, determinar la longitud reducida del péndulo así formado.

10. Una varilla de 40 cm de longitud, puede oscilar con centro de suspensión uno de sus extremos. En el otro extremo, le colocamos una pequeña masa, cuyo valor es la tercera parte de la masa de la varilla y puede considerarse concentrada en un punto del extremo. Determinar la longitud reducida del péndulo físico así formado.

11. Un niño golpea el borde de una mesa con un palo de sección constante y de 1 m de longitud. Sostiene el palo por un extremo. ¿A qué distancia del otro extremo deberá chocar con la mesa, para que note lo menos posible en la mano el efecto del golpe?

CAPÍTULO IX

ESTÁTICA DE FLUIDOS

Supongamos un fluido (líquido o gas) en equilibrio. Se demuestra experimentalmente que los esfuerzos que ejerce sobre un elemento de superficie situado dentro de la masa fluida o en las paredes de la vasija que lo contiene, están dirigidos perpendicularmente hacia el elemento considerado.

Al cociente de la fuerza elemental y el elemento de superficie sobre el cual actúa, se le llama presión

$$p = \frac{dF}{dS}.$$

Si la fuerza es constante

$$p = \frac{F}{S}.$$

La presión en un punto de un fluido es igual a la presión sobre un elemento de superficie que rodea al punto, y es independiente de la orientación de dicha superficie elemental. De aquí deducimos que la presión en un punto de un fluido es una magnitud escalar.

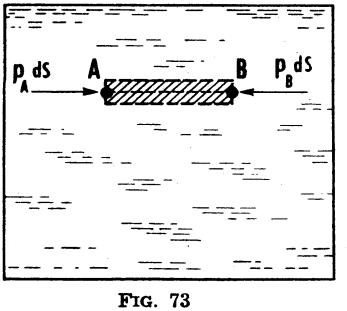


FIG. 73

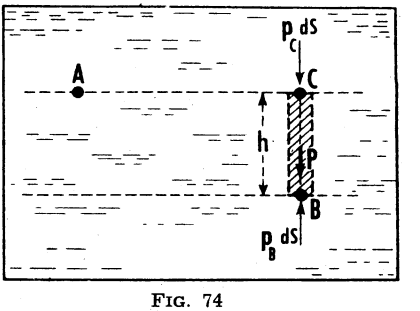


FIG. 74

Ecuación fundamental de la estática de fluidos. — Supongamos dos puntos de un fluido en equilibrio A y B, situados en una misma horizontal (figura 73). Imaginemos un cilindro de sección dS y altura la distancia AB.

Expresemos que el fluido contenido en el cilindro está en equilibrio por la acción de las fuerzas ejercidas por el resto de la masa fluida. Consideremos las componentes horizontales. Según la condición de equilibrio su suma ha de ser nula. Siendo p_A la presión en A y p_B la presión en B, y teniendo presente que las demás fuerzas son verticales, debe verificarse:

$$p_A dS - p_B dS = 0; \quad \text{es decir,} \quad p_A = p_B$$

En todos los puntos de un fluido en equilibrio que estén al mismo nivel, la presión es la misma.

Consideremos dos puntos de un fluido en equilibrio que estén a distinto nivel; por ejemplo, A y B (fig. 74). Sea C un punto en la vertical de B y en la misma horizontal de A. Imaginemos un cilindro vertical de base elemental dS, situada en B y altura h, es decir, de eje BC y las bases elementales en B y C. Vamos a expresar que el fluido contenido en este cilindro está en equilibrio por la acción de las fuerzas ejercidas por el resto del fluido. En este caso consideramos las componentes verticales, cuya suma ha de ser cero. Dichas fuerzas son: $p_C dS$ dirigida hacia abajo, el peso del fluido contenido en el cilindro, que si ρ es su densidad vale $\rho ghdS$ y $p_B dS$ dirigida hacia arriba. Escribimos pues,

$$p_C dS + \rho ghdS - p_B dS = 0,$$

es decir,

$$p_B - p_C = \rho gh; \quad \text{como} \quad p_C = p_A; \quad p_B - p_A = \rho gh.$$

La diferencia de las presiones en dos puntos de un fluido en equilibrio es igual al peso de un cilindro de la misma densidad que el fluido, que tiene por base la unidad de superficie, y por altura la distancia entre dos planos horizontales que pasen por los puntos considerados.

A la ecuación anterior se le llama *ecuación fundamental de la estática de fluidos.*

Hay que tener presente que si la densidad del fluido no es constante con la altura, esta ecuación sólo sería válida para pequeños desniveles.

Consecuencias. — En un líquido en equilibrio la superficie es plana y horizontal (en pequeñas extensiones). Ya que en la superficie libre la presión es la misma en todos los puntos (igual a la atmosférica); luego, $h = 0$.

La presión sobre el fondo de la vasija que contiene el líquido es igual ρgh, siendo h la distancia del fondo a la superficie libre del líquido. Esta presión es independiente de la superficie del fondo y de la forma de la vasija *(Paradoja hidrostática).*

La presión sobre un punto de una pared es igual a $\rho gh'$, siendo h' la distancia del punto a la superficie libre del líquido.

En dos recipientes que se comunican entre sí, al verter un líquido en uno de ellos, el nivel alcanzado en los dos es el mismo *(vasos comunicantes).* La superficie libre en los dos recipientes está en un mismo plano horizontal. Esta propiedad se utiliza para la construcción de niveles de agua y en la distribución de agua en las poblaciones. Si a cada recipiente

vertemos un líquido de distinta densidad, y no miscibles, la superficie de separación es horizontal. Las alturas de las superficies libres respecto de la superficie de separación, están en razón inversa de las densidades (fig. 75): la presión debe ser la misma sobre la superficie de separación

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 ; \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

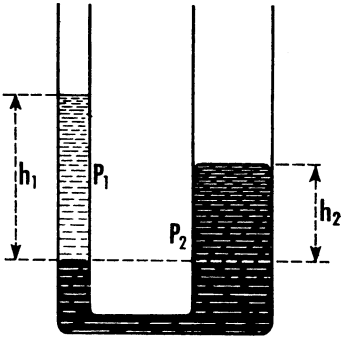


FIG. 75

Si podemos despreciar ρgh (por ejemplo en los gases), la presión en cualquier punto de la masa fluida es la misma.

Si aumentamos la presión en un punto de un fluido, ejerciendo una presión mediante una fuerza exterior, en cualquier otro punto el aumento de presión debe ser el mismo. Esto constituye el conocido *principio de Pascal,* para los líquidos que se enuncia: la presión ejercida en un punto de un líquido se transmite con el mismo valor en todas direcciones. Este *principio* se aplica a la *prensa hidráulica.*

Si en un recipiente tenemos varios líquidos no miscibles, la presión sobre el fondo es igual a la suma de las presiones debidas a cada una de los líquidos;

$$p = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \ldots$$

siendo h_1, h_2, ..., las distancias entre las superficies de separación de cada líquido. (Las superficies de separación de los líquidos son horizontales.)

Principio de Arquímedes. — Consideremos un fluido, o un sistema de fluidos, en equilibrio. Imaginemos una parte del sistema que ocupa un volumen V limitado por la superficie S (fig. 76). Para que esta parte del sistema esté en equilibrio, la suma de las fuerzas debidas a la presión y el peso del fluido, o del sistema de fluidos, dentro de S debe ser cero. La resultante de las fuerzas debidas a la presión debe ser opuesta al peso. Es decir, el sistema de fuerzas debidas a la presión equivale a una fuerza igual

al peso, dirigida hacia arriba, según la vertical del centro de gravedad del sistema de fluidos dentro de S *(centro de empuje)*.

Sustituimos el fluido limitado por la superficie S por un sólido limitado por la misma superficie. La resultante $\vec{E}$ de las fuerzas debidas a la presión es la misma que antes (ya que no hemos modificado la superficie S). El cuerpo está sometido a una fuerza según la vertical del centro de empuje y hacia arriba. A esta fuerza se le llama *empuje*. El principio de Arquímedes se puede enunciar:

Todo cuerpo sumergido en un sistema de fluidos experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso de los fluidos desalojados.

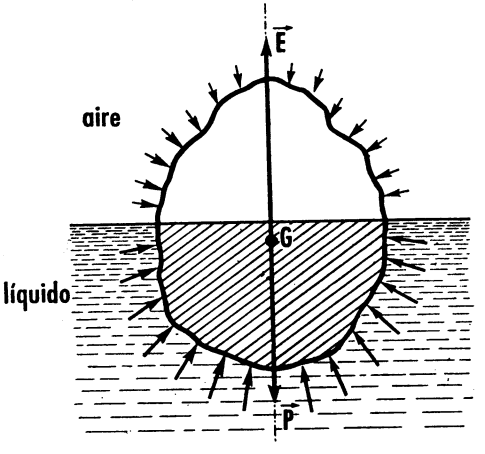


FIG. 76

En el caso de la figura 76 se puede despreciar el empuje del aire y considerar sólo el del líquido. El principio se enunciaría: todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso del líquido desalojado.

Si un sólido homogéneo está sumergido totalmente en el líquido, para que esté en equilibrio el peso del sólido debe ser igual al del líquido desalojado.

$$P = E; \qquad \rho_S g V = \rho_L g V; \qquad \rho_S = \rho_L$$

ρ_L densidad del líquido

ρ_S densidad del sólido;

luego es necesario que tengan la misma densidad. Si la densidad del sólido es mayor que la del líquido, el sólido cae hacia el fondo. Si la densidad del sólido es inferior a la del líquido, asciende y puede quedar en equilibrio parcialmente sumergido.

Supongamos un aerostato; éste asciende a causa del empuje, pues el gas que lo llena tiene densidad inferior a la del aire. Si el peso de todo el aparato es mg, el volumen V, la densidad del gas ρ y la del aire ρ_a, la fuerza ascensional es igual al empuje menos el peso total del aerostato:

$$E = \rho_a g V;$$
$$P = mg + \rho g V \qquad F = E - P = \rho_a g V - \rho g V - mg = [(\rho_a - \rho)V - m]g$$

Problema

Determinar la fuerza ascensional de un globo de 2 m³ lleno de hidrógeno en condiciones normales de presión y temperatura. La masa del globo junto con los accesorios es de 600 g.

Densidad del hidrógeno $\rho = \frac{2}{22\,400}$; densidad del aire $\rho_a = 0.001293$ g cm⁻³

$$F = \left[\left(0.001293 - \frac{1}{11\,200} \right) 2 \cdot 10^6 - 600 \right] 980 \text{ dinas} \qquad F = 17{,}713 \text{ newton} = 1{,}807 \text{ kp}$$

Aplicaciones del principio de Arquímedes. — Una de las aplicaciones más importantes del principio de Arquímedes es la flotación, que estudiaremos más adelante.

Otras aplicaciones son la determinación de volúmenes y densidades. Para determinar el volumen de un cuerpo podemos utilizar la balanza hidrostática. Consiste en una balanza tal, que uno de los platillos está a un nivel superior al otro. Del platillo más alto colgamos el cuerpo por medio de un hilo muy fino. Se equilibra la balanza. Introducimos el cuerpo en un recipiente con agua destilada. El empuje del líquido nos desequilibra la balanza. Añadimos pesas, cuya masa vale m, en el platillo donde pende el cuerpo. Basta equilibrar de nuevo y determinar el empuje. Como

$$E = V\rho_a g; \qquad V = \frac{E}{\rho_a g} = \frac{mg}{\rho_a g} = \frac{m}{\rho_a}$$

(siendo ρ_a la densidad del agua a la temperatura del experimento).

(Véase en las Prácticas la determinación de volúmenes y densidades.)

Para determinar la densidad de líquidos puede utilizarse la misma balanza con un flotador que al sumergirse en el líquido nos desequilibra la balanza. Equilibramos y, como antes, las pesas añadidas igualan al empuje

$$mg = V\rho g; \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

si conocemos el volumen del flotador V (si no lo conocemos, lo determinamos por el procedimiento anterior), podemos hallar la densidad del líquido.

Otros métodos para determinar densidades de líquidos son los de la balanza de Mohr y el aerómetro. (Véase Prácticas.)

Se usa también el principio citado para *corregir las pesadas* al vacío; es decir, determinar la masa de un cuerpo corrigiendo el empuje que su-

fren él y las pesas por el hecho de estar sumergidos en el aire. Esta corrección se hace cuando las pesadas requieren mucha precisión y las densidades del cuerpo y de las pesas difieren notablemente.

Por ejemplo, en la determinación de una masa gaseosa encerrada en un recipiente de vidrio.

Ejemplo: Pesamos un cuerpo de masa m y de densidad d; la masa de las pesas es m', y su densidad d'. Estando la balanza equilibrada, debe verificarse (m' es el valor indicado en la pesa):

$$\left.\begin{aligned} P - E = P' - E' \\ P = mg\,; \quad P' = m'g \\ E = Vd_a g\,; \quad E' = V'd_a g \end{aligned}\right\} \quad mg - \frac{m}{d}d_a g = m'g - \frac{m'}{d'}d_a g$$

$$m\left(1 - \frac{d_a}{d}\right) = m'\left(1 - \frac{d_a}{d'}\right)$$

$$m = m'\frac{1 - \frac{d_a}{d'}}{1 - \frac{d_a}{d}} \simeq m'\left(1 - \frac{d_a}{d'} + \frac{d_a}{d}\right)$$

siendo d_a la densidad del aire.

La masa m del cuerpo corregida al vacío vale

$$m = m'\left(1 - \frac{d_a}{d'} + \frac{d_a}{d}\right)$$

Estudio de la flotación. — Sea un cuerpo flotante. En la figura 77 hemos representado la sección de un navío. En el caso *a*) el navío flota, estando el centro de gravedad y el centro de empuje en la misma vertical. Siendo $\vec{E}$ y $\vec{P}$ vectores opuestos, el navío está en equilibrio.

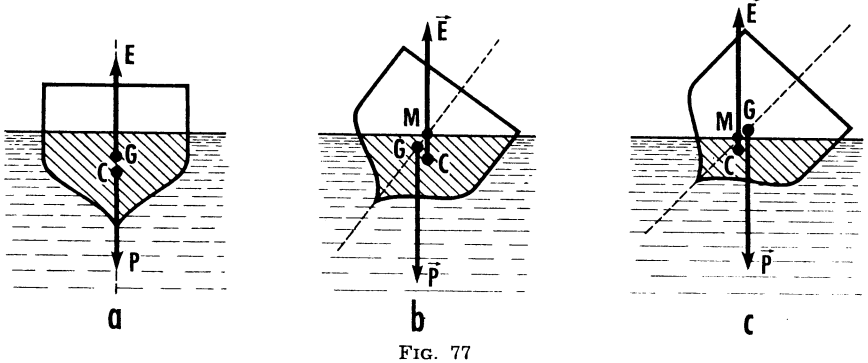


FIG. 77

Supongamos que por una causa cualquiera el navío se inclina (figura 77, *b*). El centro de gravedad del navío continúa siendo el mismo: *G*.

El centro de empuje ha variado, ya que, aunque el volumen de la parte sumergida es el mismo que antes, tiene forma distinta. Sea C' el nuevo centro de empuje. Las fuerzas $\vec{P}$ y $\vec{E}$ son iguales en módulo y de sentidos contrarios, pero sus líneas de acción no coinciden. Las fuerzas $\vec{P}$ y $\vec{E}$ forman un par de fuerzas cuyo momento vale el producto de una de las fuerzas por la distancia de sus líneas de acción. Este par de fuerzas hace que el navío vuelva a su posición de equilibrio. Entonces el momento del par es cero. Se demuestra que el equilibrio de un navío inclinado es estable (vuelve a la posición inicial de equilibrio) cuando la vertical del centro de empuje corta a la vertical primitiva en un punto M situado encima del centro de gravedad G. A este punto M se le llama *metacentro*.

Si el metacentro es más bajo (fig. 77, *c*), el momento del par de fuerzas es de sentido contrario al anterior, y en lugar de restablecer el equilibrio inicial lo inclinaría más y en lugar de enderezar al navío lo haría caer de lado.

Caso de estar el metacentro más alto que el centro de gravedad, vemos que aumentamos la estabilidad al aumentar la distancia GM, pues el momento del par es mayor, ya que aumenta su brazo. Para aumentar la estabilidad, el centro de gravedad debe estar lo más bajo posible. Por esto en los buques se procura que la maquinaria y la carga estén en la parte inferior.

El aumento de la distancia GM tiene un inconveniente, y es que al aumentar el momento del par disminuimos el período de oscilación del balanceo, lo cual es molesto para los pasajeros del barco y es un inconveniente para los barcos de guerra. Por esto no se hace muy grande la distancia GM y se da a los barcos una sección especial, de forma que el par sea grande al rebasar cierta inclinación.

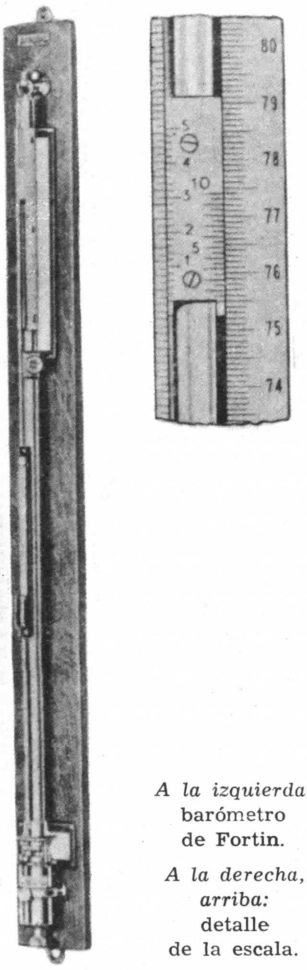
Presión atmosférica. — La atmósfera terrestre origina una presión sobre los cuerpos situados en ella. Para determinar la diferencia de presión entre dos puntos de la atmósfera podemos aplicar la ecuación fundamental de la estática de fluidos $p_2 - p_1 = \rho g h$.

Si ascendemos en la atmósfera, disminuye la presión al aumentar la distancia a la superficie terrestre, pues disminuye la altura de la columna de aire.

No podemos utilizar la fórmula anterior para puntos situados a una diferencia de alturas relativamente grande, debido a que la densidad del aire no es constante. Depende de la presión y también de la temperatura. Para cada punto la presión atmosférica no es constante, varía con el estado del tiempo. En Meteorología es muy útil conocer la presión atmosférica en distintos puntos.

Torricelli determinó experimentalmente la presión atmosférica usando un tubo de vidrio cerrado por un extremo lleno de mercurio, que al invertirlo verticalmente sobre una cubeta que contenía mercurio, vio que el nivel en el tubo era superior al de la cubeta. La columna de mercurio

sobre el nivel de la cubeta es equilibrada por la fuerza de la presión atmosférica. En condiciones normales la altura de la columna desde el nivel de la cubeta a la superficie libre en el tubo, es de 76 cm. La presión del mercurio sobre el fondo, igual a la atmosférica, vale en este caso $p = \rho gh = 13{,}59 \cdot 980{,}6 \cdot 76 = 1{,}0133 \cdot 10^6$ dinas/cm^2. A la unidad de presión, en el sistema C. G. S., dina/cm^2, se le llama *baria*. La presión atmosférica normal vale pues, $1{,}0133 \cdot 10^6$ barias. Al valor de la presión atmosférica normal se le llama *atmósfera*. La unidad de presión en el sistema Giorgi es el newton/m^2. En la técnica se utiliza una unidad que es el kp/cm^2, que equivale a $1000 \cdot 980{,}6$ dinas/cm^2 $= 9{,}806 \cdot 10^5$ barias.



A la izquierda: barómetro de Fortin.

A la derecha, arriba: detalle de la escala.

En muchas medidas de presión atmosférica se utiliza el milibar, que es la milésima de un bar (1 bar $= 10^6$ barias), es decir, 1000 barias. La atmósfera equivale a 1013,3 milibar.

Se utiliza con bastante frecuencia para la medida de la presión atmosférica la altura de la columna de mercurio expresada en milímetros, siendo el milímetro de mercurio 1/760 parte de una atmósfera. A esta unidad se le llama tor. A continuación damos un cuadro con las equivalencias, entre estas unidades:

1 kp/cm^2 = 0,968 atm. = $0{,}9806 \cdot 10^5$ newton/m^2 = $= 735{,}6$ tor $= 9{,}806 \cdot 10^5$ barias

1 atm. = 1,0133 kp/cm^2 = $1{,}0133 \cdot 10^5$ newton/m^2 = $= 760$ tor $= 1{,}0133 \cdot 10^6$ barias

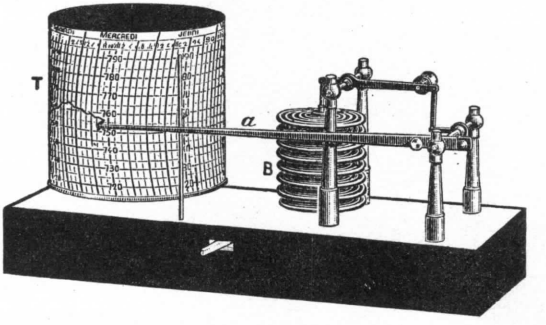
1 newton/m^2 $= 1{,}02 \cdot 10^{-5}$ kp/cm^2 = $= 9{,}87 \cdot 10^{-6}$ atm. $= 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ tor $= 10$ barias

Barómetros. — Son aparatos destinados a la medida de la presión atmosférica. Los barómetros de mercurio se basan en el experimento de Toricelli. Para evitar tener que medir el desnivel entre la cubeta y la superficie libre del mercurio en el tubo, se utilizan otros tipos de barómetro. Uno, el de Fortin, tiene el fondo de la cubeta de gamuza, de forma que podemos modificar su nivel. Colocando una escala adosada al tubo haremos coincidir el cero de la escala con el nivel de la cubeta. Para lograr cómodamente esto, lleva un índice fijo vertical, situado de forma que al coincidir el cero de la escala con el nivel de la cubeta, la punta del índice es tangente a la superficie libre del mercurio en ella.

Otro modelo es el de Tonnelot, o de *escala compensada*. Las divisiones de la regla graduada están calculadas para compensar las lecturas al variar el nivel de la cubeta, debido a los ascensos o descensos del mercurio del tubo.

En estos barómetros hay que corregir la disminución de densidad del mercurio con la temperatura, la dilatación de la escala, menisco del mercurio y otras correcciones de menor importancia (véase en las Prácticas).

El barómetro *aneroide*, más cómodo de manejo que los de mercurio, consta de una caja, cuyas paredes superior e inferior son muy delgadas. Se practica el vacío en su interior, donde lleva un muelle, para evitar el aplastamiento. Al variar la presión exterior, varía la deformación del muelle y estas variaciones se transmiten a una aguja indicadora. Se calibra por comparación con un barómetro de mercurio.



Barómetro registrador

Compresibilidad de los gases. — Tenemos un gas encerrado en un recipiente. Supongamos que podemos modificar el volumen del recipiente; por ejemplo, un gas encerrado en un cuerpo de bomba. Si comprimimos el pistón observaremos que el volumen ocupado por el gas disminuye, y que la disminución de volumen aumenta con la presión ejercida por el pistón.

Es decir, la disminución relativa de volumen es proporcional al aumento de presión. Sea un gas que ocupa un volumen V a la presión p; si aumentamos p en Δp, el volumen disminuye en ΔV, y podemos escribir:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$$

a κ se le llama *coeficiente de compresibilidad*. El signo menos expresa que si p aumenta ($\Delta p > 0$), V disminuye ($\Delta V < 0$).

Si en lugar de un gas tuviésemos un líquido, la disminución de volumen es inapreciable. La compresibilidad de los gases es mucho mayor que la de los líquidos y sólidos.

Ley de Boyle. — Supongamos un gas dentro de un tubo cerrado por un extremo y el otro en comunicación con un depósito de mercurio, por medio de un tubo de goma. Si elevamos el depósito que contiene el mercurio, aumentamos la presión a que se halla sometido el gas, y observaremos que el mercurio asciende por el tubo que contiene el gas. El volumen ocupado por el gas va disminuyendo a medida que aumentamos la presión.

La ley de Boyle nos relaciona los volúmenes ocupados por un gas al variar la presión a la que está sometido. Dicha ley dice: *El volumen ocupado por una masa gaseosa está en razón inversa de la presión,* siempre que la temperatura se mantenga constante.

Sea V_0 y p_0 el volumen y la presión iniciales. V el volumen cuando la presión es p. La ley de Boyle expresa que

$$\frac{V}{V_0} = \frac{p_0}{p}; \qquad Vp = V_0 p_0: \qquad \text{o bien} \qquad pV = \text{constante}.$$

La representación gráfica de $pV = \text{constante}$ tomando p en abscisas y V en ordenadas, es una hipérbola equilátera de asíntotas los ejes. Si tomamos en ordenadas $p \cdot V$ y en abscisas p, la representación es una recta paralela al eje de abscisas.

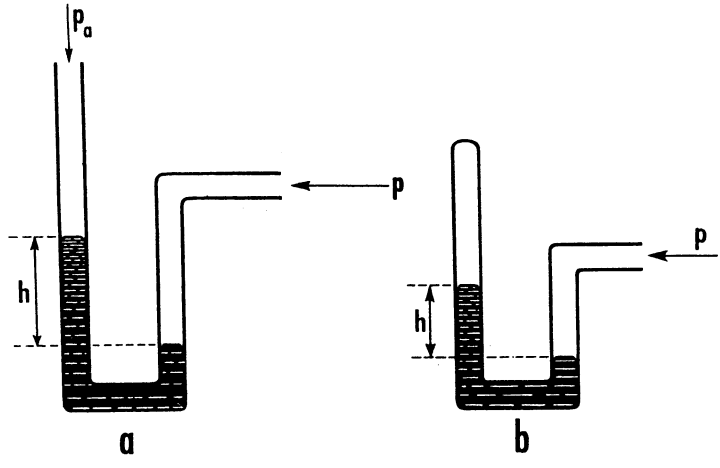


FIG. 78

Aplicación:

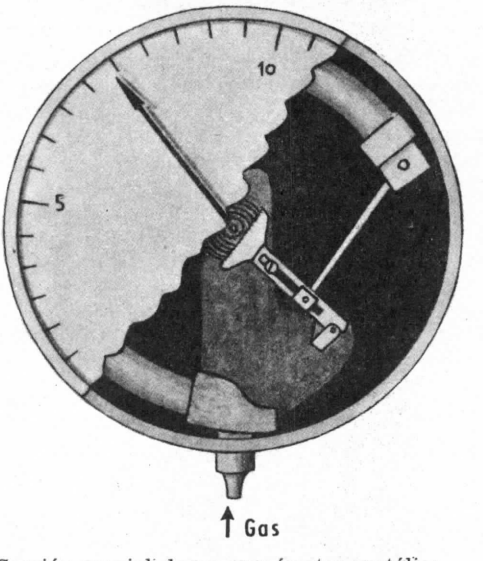
Determinar la densidad de un gas a cierta presión p conocida su densidad a la presión normal p_0 (se supone que no hay variación de temperatura).

$$d = \frac{m}{V} \quad d_0 = \frac{m}{V_0} \Bigg\} \quad \frac{d}{d_0} = \frac{V_0}{V}; \quad \text{como} \quad pV = p_0 V_0; \quad V_0 = \frac{pV}{p_0};$$

$$d = \frac{V_0}{V} d_0 = \frac{\frac{pV}{p_0}}{V} d_0 = \frac{p}{p_0} d_0$$

Manómetros. — Son aparatos destinados a la medida de una presión cualquiera. El manómetro de mercurio más sencillo consta de un tubo en U que constiene mercurio, abierto por los dos extremos. Uno de ellos lo ponemos en comunicación con el recipiente donde está el gas, cuya presión queremos medir. El desnivel del mercurio en las dos ramas es igual a la presión que queremos medir menos la presión atmosférica (figura 78 *a*)

$$\rho g h = p - p_a; \quad p = p_a + \rho g h$$



Sección parcial de un manómetro metálico

Otro tipo de manómetro tiene un extremo cerrado. Para medir bajas presiones en este extremo se ha practicado el vacío, de esta forma el desnivel de mercurio nos da la presión a medir (fig. 78 *b*). Para medida de presiones más elevadas, puede llenarse de aire la parte cerrada de tubo. De esta forma al aumentar la presión y ascender el mercurio por dicha rama, el aire se comprime y se opone al ascenso, debido a su aumento de presión. La presión medida será la suma de la presión del aire en la rama

cerrada más ρgh (siendo h el desnivel del mercurio en las dos ramas). Por lo general están calibrados y se lee directamente la presión.

Industrialmente se utilizan los *manómetros metálicos*. Estos manómetros son de más fácil manejo y transporte. Constan de un tubo de acero muy delgado de sección elíptica y arrollado circularmente. Un extremo está abierto y se pone en comunicación con el recipiente que contiene el gas cuando queremos medir su presión. El otro extremo está cerrado y en comunicación con un vástago articulado, que transmite los movimientos del tubo a un índice. Al aplicar una presión a la parte abierta del tubo, actúa en el interior tendiendo a desarrollar dicho tubo y este movimiento transmitido al índice, nos indica la presión. Debe calibrarse previamente para que la lectura de la presión sea directa.

PRÁCTICAS

Experiencias sobre la medida de presiones hidrostáticas. — Tomemos un tubo de vidrio (fig. 79) abierto por los lados. Colocamos un disco ligero (de cartón, aluminio, etc.) que actúa de obturador del tubo en su parte inferior.

Situando el tubo dentro de una vasija que contiene un líquido, la presión actúa perpendicularmente al obturador para cualquier posición del tubo y este obturador se mantiene en equilibrio comprimido contra la parte inferior del tubo.

Si vertemos lentamente, dentro del tubo, un líquido igual al contenido en la vasija, observaremos que el obturador se mantiene en equilibrio, hasta que el nivel del líquido en el tubo coincide con el de la vasija. Si el líquido vertido, tiene menor densidad, que el contenido en la vasija, el obturador no cae hasta que el nivel es superior al de la vasija. Si la densidad del líquido vertido fuese mayor, el obturador caería antes de que los niveles coincidiesen.

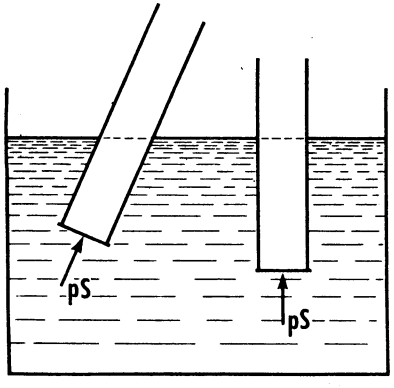


FIG. 79

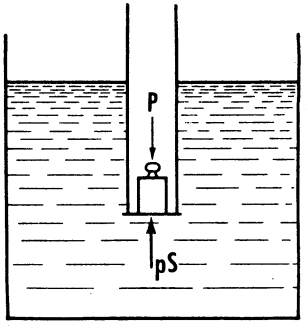


FIG. 80

Podemos escribir:

$$p = \varrho_1 g h_1 = \varrho_2 g h_2 ; \qquad h_1 = \frac{\varrho_2 h_2}{\varrho_1}$$

Cuando cae el obturador, la altura alcanzada en el tubo por el líquido que hemos vertido, es igual al cociente de la densidad del otro líquido y la propia, multiplicado por la longitud de tubo sumergido. Con este artificio podemos medir la presión en un líquido.

En lugar de verter líquido, puede colocarse una pesa de valor conocido (fig. 80). Sumergimos el tubo, hasta cierta profundidad, sujetando el obturador. La profundidad es tal, que las fuerzas de la presión superan al peso. Vamos elevando el tubo, hasta que cae el obturador con el peso. En aquella posición, la presión del líquido es igual al peso dividido por la sección del tubo.

Comprobación del principio de Arquímedes y de su recíproco. — Para la comprobación del principio de Arquímedes podemos utilizar la balanza hidrostática citada en teoría. Colgaremos un cuerpo del platillo del platillo más alto. Debajo del cuerpo colocamos una vasija V (fig. 81) con un vertedero, llena de

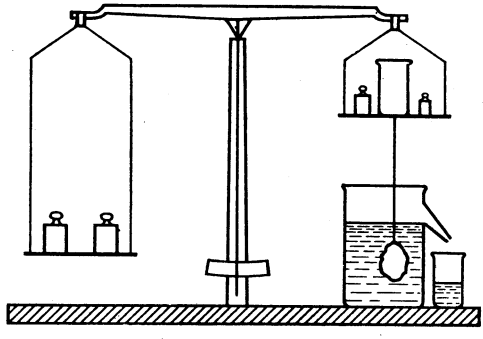


FIG. 81

agua justo a nivel del vertedero. El agua que se derrame por el vertedero se recoge en un vaso v. Colocamos un vaso v' idéntico al v en el platillo del cual pende el cuerpo y equilibramos la balanza (con el cuerpo ya colgado). Elevamos las vasijas V y v de forma que el cuerpo se sumerja en V y recogemos el agua que se derrama en v. Cuando el cuerpo está completamente sumergido, el volumen de agua recogido en v, será igual al desalojado por el cuerpo.

La balanza se ha desequilibrado, debido al empuje del líquido sobre el cuerpo. Para restablecer el equilibrio, sustituimos el vaso v' del platillo donde pende el cuerpo, por el vaso v lleno del líquido desalojado por el cuerpo. El restablecimiento del equilibrio nos indica que el empuje es igual al peso de líquido desalojado, lo cual comprueba el principio de Arquímedes.

Recíproco del principio de Arquímedes. — Todo cuerpo sumergido en un líquido, en equilibrio en una vasija, parece ejercer una fuerza vertical de arriba abajo, sobre la vasija, igual al peso de líquido desalojado. Para esta comprobación puede usarse cualquier balanza. No hace falta que sea hidrostática. En un platillo se coloca la vasija y el vaso v citados en la comprobación anterior.

Con la vasija V llena y el v dispuesto al lado para recoger el líquido que pueda derramarse de V, equilibramos la balanza. Tenemos el cuerpo colgado de un soporte exterior a la balanza, por medio de un hilo fino. Al sumergir el cuerpo en la vasija V, procurando que no toque al fondo ni a las paredes, la balanza se desequilibra. Si quitamos el líquido derramado en v, colocando nuevamente v, la balanza se equilibra nuevamente. Esto indica que la fuerza hacia abajo sobre la vasija, vale el peso del líquido desalojado por el cuerpo.

Determinación de densidades, con exprexión del error. — Vamos a determinar la densidad de un sólido, por el procedimiento de la balanza hidrostática. Caso de no disponer de balanza hidrostática, puede adoptarse una balanza corriente de laboratorio. La apoyaremos sobre un banquillo de madera de suficiente altura, para que se pueda colocar debajo, con holgura, una vasija con agua. Practicamos un orificio en el soporte de la balanza y otro a continuación en el banquillo, de forma que pase libremente el hilo del cual colgaremos el cuerpo. Para equilibrar la balanza utilizaremos el método de carga constante. Una vez colgado el cuerpo, cuya densidad queremos hallar, de su platillo correspondiente, taramos el otro con una pesa de masa algo superior a la del cuerpo. Equilibramos con pesas. Sea m_1 el valor las masas añadidas en el platillo del cual pende el cuerpo, para restablecer el equilibrio.

Quitamos el cuerpo y equilibramos de nuevo. Sea m_2 el valor de las masas en el platillo donde estaba el cuerpo. La masa buscada vale $m = m_2 - m_1$. Colgamos de nuevo el cuerpo y lo sumergimos en el agua de la vasija, la cual la habremos colocado debajo de manera adecuada. Equilibrando de nuevo, sea m_3 las masas actuales en el citado platillo. El peso de $m_2 - m_3$, es igual al empuje. Siendo ϱ la densidad del agua, escribiremos:

$$(m_2 - m_3)\ g = \varrho V g; \qquad V = \frac{m_2 - m_3}{\varrho}$$

De aquí podemos hallar la densidad. Conocemos la masa $m = m_2 - m_1$ y el volumen $V = \dfrac{m_2 - m_3}{\varrho}$.

La densidad será

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_3} \cdot \varrho$$

El valor de la densidad del agua para cada temperatura viene dado en unas tablas (véase pág. 165). A 4° C $\varrho = 1$; para temperaturas que no difieren mucho de 4° C puede tomarse el valor de $\varrho = 1$ sin mucho error. El error cometido en la determinación de la densidad por este procedimiento depende de la precisión de las pesadas.

El error absoluto máximo en la determinación de la masa m es igual a la suma de los errores absolutos máximos cometidos al determinar m_2 y m_1. En la determinación de V será la suma de los errores absolutos máximos de m_2 y m_3, si es despreciable el error cometido en la densidad del agua. El error relativo total será como máximo la suma de los errores relativos máximos del numerador más el del denominador.

Ejemplo.

Los valores de las pesadas son:

$$m_2 = 71 \quad \text{g}$$
$$m_1 = 5{,}62 \quad \text{g}$$
$$m_3 = 63{,}22 \quad \text{g}$$
$$m = m_2 - m_1 = 65{,}38 \quad \text{g}$$
$$V = \frac{m_2 - m_3}{\varrho} = \frac{7{,}78}{\varrho}\ \text{cm}^3$$

Disponemos de una balanza tal que el error cometido en la determinación de las masas es inferior a 0,01 gramos. El error absoluto máximo en la determinación de m es $0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}02$ y el relativo $\frac{0{,}02}{65{,}38}$.

El error absoluto máximo en la determinación de $m_2 - m_3$ es también 0,02 y el relativo $\frac{0{,}02}{7{,}78}$.

Supongamos que la temperatura sea 20°C. Tomamos de las tablas $\varrho = 0{,}99825$ gramos/cm³, con un error absoluto inferior a 0,00001 (despreciable frente a los otros).

El error relativo máximo, en la determinación de la densidad es:

$$\frac{0{,}02}{65{,}38} + \frac{0{,}02}{7{,}78} = 0{,}0029, \text{ inferior al } 0{,}3\ \%$$

$d = \frac{65{,}38}{7{,}78} \cdot 0{,}99825 = 8{,}3904\ldots$ g/cm³; el error absoluto máximo será entonces $8{,}39 \cdot 0{,}0029 = 0{,}024$.

Poniendo $d = 8{,}40$, el error es $0{,}0096\ldots < 0{,}024$, luego la densidad será

$$d = (8{,}40 \pm 0{,}02)\ \text{g/cm}^3$$

(Podíamos haber tomado la densidad del agua $\varrho = 1$, pues el valor obtenido tomando $\varrho = 1$ cae dentro de los límites del error.)

Si queremos hallar la densidad de un líquido, podemos utilizar la balanza hidrostática. Colgamos del platillo superior un cuerpo *(inmersor)*, de mayor densidad que el líquido, del cual queremos determinar su densidad. Taramos la balanza colocando en el otro platillo una masa mayor que la del inmersor. Equilibramos con pesas de masa m_1. Se sumerge el inmersor en el líquido problema, dispuesto en cierta vasija debajo del platillo superior. Se procura que el inmersor no toque al fondo de la vasija. El empuje del líquido desequilibra la balanza. La equilibramos con pesas cuya masa es m_2. Se sustituye la vasija que contiene el líquido por otra con agua destilada. Se sumerge el inmersor en el agua (después de haberlo lavado con agua). Se equilibra de nuevo con las masas m_3. El empuje del líquido vale $(m_2 - m_1) \cdot g = V \cdot d \cdot g$ y el del agua $(m_3 - m_1) \cdot g = V \cdot \varrho \cdot g$. Siendo V y d el volumen y la densidad del cuerpo. Dividimos miembro a miembro las anteriores igualdades y queda

$$\frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} = \frac{d}{\varrho}; \qquad d = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}\,\varrho$$

Ejemplo: Sean $m_1 = 12{,}50$ g; $m_2 = 24{,}82$ g; $m_3 = 23{,}20$ g. Utilizando la balanza anterior, cometemos un error absoluto máximo en cada pesada, inferior a

0,01. Suponiendo que la temperatura es 15° C, la densidad del agua es igual a 0,9991 g/m³. Tomando $\varrho = 1$ el error cometido es inferior a 0,001. Tomando $\varrho = 1$ el error cometido es inferior a 0,001

$$m_2 - m_1 = 12{,}32\,; \quad m_3 - m_1 = 10{,}70$$

error relativo máximo $\dfrac{0{,}02}{12{,}32} + \dfrac{0{,}02}{10{,}7} + 0{,}001 = 0{,}0036.$

$$d = \frac{12{,}32}{10{,}7} \cdot 1 = 1{,}1523\,; \quad \text{el error absoluto máximo} = 0{,}0041$$

$$d = (1{,}152 \pm 0{,}004)\ \text{g/cm}^3$$

Podemos determinar la densidad de líquidos con gran comodidad con la *balanza de Mohr*. Tiene la ventaja de que determinamos la densidad por lectura directa, pudiendo apreciar hasta la cuarta cifra decimal. Representamos dicha balanza en la figura 82. El inmersor *I* colgado de un extremo, equilibra la balanza

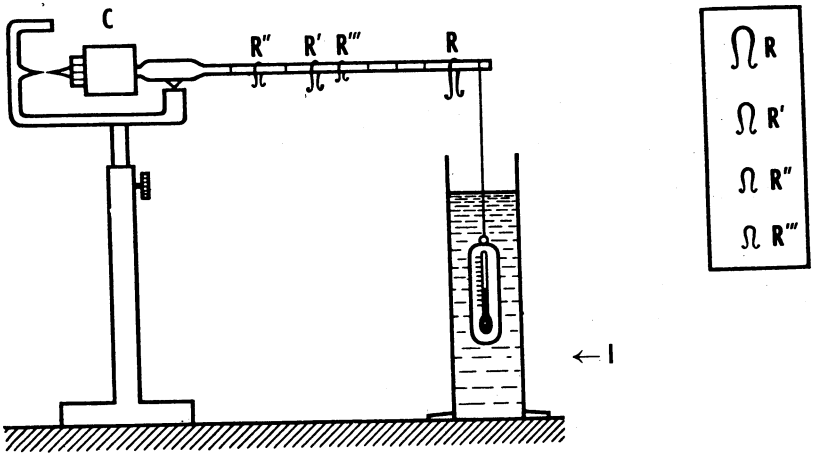


FIG. 82

(cuando está en el aire). Sumergido en agua destilada a 4° C equilibramos la balanza colgando en el extremo *B* un reiter *R*. Cuando la balanza está equilibrada, las puntas *A* están en una misma horizontal. Si en los dos casos anteriores, la balanza no estuviese perfectamente equilibrada puede corregirse desplazando ligeramente el contrapeso C. Disponemos de cuatro tipos de *reiter*: *R*, *R'*, *R''* y *R'''*, la masa de cada uno de ellos es la décima parte de la del anterior.

Situado el inmersor sumergido en un líquido, equilibramos su empuje colocando los reiter necesarios, teniendo presente que el reiter *R* colocado en el extremo indica 1. El *R'*, 0,1; el *R''*, 0,01 y el *R'''* 0,001. El brazo donde colocamos los reiter, está dividido en diez partes iguales. Si colocamos el *R* en la división 1 indica 0,1 en la 2 0,2 y así sucesivamente. Para cada uno de los restantes, la indicación es la décima parte del anterior correspondiente. La densidad del líquido contenido en la probeta representada en la figura 82 es 0,9536 g/cm³. El inmersor lleva un pequeño termómetro para medir la temperatura del líquido.

Para la determinación más rápida aunque menos precisa puede utilizarse el *areómetro*. Consiste en un flotador lastrado en su parte inferior, que se prolonga en el otro extremo, por una varilla de vidrio dividida en cierto número de partes. Colocado en un líquido, flota verticalmente de forma que su peso, se equilibra con el empuje del líquido. Éste vale el peso de un volumen de líquido igual al de la parte sumergida. Este aparato se calibra y así podemos leer directamente la densidad del líquido (densímetros). Se usan también para determinar la concentración de una disolución conocida, por ejemplo los *alcoholímetros*.

Lecturas barométricas, con las correspondientes correcciones. — Antes de efectuar la lectura de la altura de la columna de mercurio, debemos comprobar el cero. Si es un barómetro Tonnelot, no hace falta corrección de cero. Caso de un barómetro Fortín, el fondo de la cubeta es de gamuza y podemos desplazarlo por medio de un tornillo colocado en la parte inferior de la misma. Para corregir el cero, comprobaremos si la superficie libre del mercurio en la cubeta, es tangente a una referencia de punta afilada. Moviendo el tornillo podremos lograr la tangencia, lo cual podemos comprobar, observando la imagen de la punta, reflejada por el mercurio. Cuando se verifica la tangencia, la punta de la referencia coincide con la de la imagen. Si disponemos sólo de un barómetro simple, no corregido y sin el fondo de la cubeta móvil, introduciremos una cuña en la cubeta. Desplazándola verticalmente en un sentido u otro lograremos que el cero de la escala adosada al tubo, coincida con la superficie libre del mercurio en la cubeta.

Para leer la altura en la escala, generalmente lo hacemos con un nonius. Al desplazar el nonius, movemos verticalmente una referencia solidaria del nonius cuya parte inferior está en el mismo plano horizontal que el cero del nonius. Cuando esta referencia es tangente al menisco *(observamos perpendicularmente al tubo)* leemos en la escala la división correspondiente, que generalmente son milímetros y en el nonius la fracción correspondiente, generalmente décimas de milímetro.

Debido a la variación de densidad del mercurio con la temperatura debe reducirse la altura leída a 0° C. La escala también se dilata, luego hay que corregir la dilatación de escala (véase cap. 10). Estas correcciones están tabuladas y sabiendo la temperatura (que la leemos en un termómetro que está junto al barómetro) no hay más que consultar en las tablas la correspondiente corrección. Para temperaturas superiores a 0° C la corrección es siempre sustractiva.

Tabla de reducción a 0° de la altura barométrica
(barómetro de escala de latón)

	Altura leída en mm (tor)								
°C	700	710	720	730	740	750	760	770	780
10	1,14	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27
12	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53
14	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	1,78
16	1,83	1,85	1,88	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,03
18	2,05	2,08	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
20	2,28	2,31	2,35	2,38	2,41	2,45	2,48	2,51	2,54
22	2,51	2,55	2,58	2,62	2,65	2,69	2,73	2,76	2,80
24	2,74	2,78	2,82	2,86	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05
26	2,97	3,01	3,06	3,10	3,13	3,17	3,21	3,26	3,30
28	3,20	3,24	3,30	3,34	3,37	3,41	3,45	3,51	3,55

Debido a que la presión atmosférica está equilibrada por el *peso* de la columna de mercurio, este peso varía con *g* y por tanto hay que corregir la *g* del lugar, a la gravedad normal (9,80665 m/seg.^{2}).[1] Según el diámetro del tubo tendremos un menisco el cual hay que corregir. Esta corrección es una constante del aparato y está indicada en el propio aparato.

Comprobación de la ley de Boyle. — Podemos utilizar el siguiente dispositivo (fig. 83). Un tubo *A*, provisto de una llave *L* en su parte superior, está graduado en centímetros cúbicos y cada división subdivida en décimas de centímetro cúbico. (Puede usarse una *bureta para gases*.)

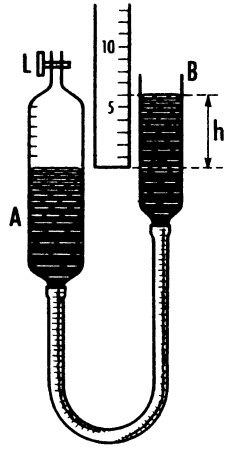


FIG. 83

Este tubo *A* comunica, por medio de un tubo de goma, con otro *B*. El tubo *A* se coloca fijo en un soporte y el *B* debe poderse elevar o descender. Comprobaremos la ley de Boyle para el aire. Con la llave *L* abierta se colocan *A* y *B* a la misma altura, vertiendo mercurio dentro de *B* hasta que el nivel de mercurio en *A* esté a la mitad. Los niveles en *A* y en *B* están en un mismo plano horizontal. Cerramos la llave, con lo cual queda encerrada en *A* una masa de aire, que ocupa un volumen *V* (indicado en la división correspondiente al nivel de mercurio en *A*) y su presión es igual a la atmosférica, en este instante en el lugar donde operamos. Leemos la presión atmosférica p_a en un barómetro. Elevamos el tubo *B* y observamos que asciende el nivel del mercurio en *A*, lo cual indica que ha disminuido el volumen ocupado por el aire. Leemos el volumen V' y medimos el desnivel *h* entre las superficies libres del mercurio en los dos tubos. La presión del aire que ocupa el volumen V' es $p_a + h$ [midiendo p_a en milímetros de mercurio (tor) y *h* en milímetros]. Repetimos la operación elevando o descendiendo el tubo *B* a distintas alturas, anotando en

1. Si la altura leída es *h*, para corregir a la gravedad normal en Barcelona multiplicaremos $h \cdot \frac{9{,}802}{9{,}806} = h \cdot 0{,}9997 = h\ (1 - 0{,}00029) = h - 0{,}00029\ h$. A la altura leída *h*, le restaremos 0,00029 *h*. Si *h* es 760 tor le restaríamos $0{,}00029 \cdot 760 = 0{,}23$ tor.

cada caso los valores de V y h. Multiplicando $p \cdot V$, en cada caso, debemos hallar el mismo valor. Podemos representar gráficamente el producto $p \cdot V$ en función de p y hallaremos una recta paralela al eje de abscisas.

Para operar con cualquier otro gas, llenamos (con la llave abierta) el tubo A de mercurio, elevando suficientemente el tubo B. Una vez el nivel en A está en la parte superior, se pone en comunicación un recipiente que contenga el gas que nos interesa, por medio de una goma, con la parte superior de A. Descendiendo el tubo B, a medida que desciende el nivel de mercurio, va penetrando el gas que queremos utilizar. A continuación, podemos operar como antes.

CUESTIONES

1. *¿Qué condiciones debería cumplir un fluido, para que la presión de todos sus puntos fuese la misma?*

2. *Un cuerpo que flota en el agua del mar, ¿podría no flotar en un lago?*

3. *Cítense objetos que flotan o no flotan en mercurio.*

4. *Un tubo flota verticalmente en el agua, si lo lastramos con un poco de mercurio. ¿Por qué? Si le quitamos el mercurio, ¿qué ocurre?*

5. *¿Varía con la altura la fuerza ascensional de un globo?*

6. *En un platillo de una balanza equilibrada tenemos un recipiente con agua. Introducimos un objeto suspendido de un hilo sin tocar el fondo. La balanza se desequilibra y para equilibrarla de nuevo, colocamos pesas en el otro platillo. ¿A qué equivale el valor de las pesas? ¿Podría tener alguna utilidad este experimento?*

7. *Queremos construir un barómetro utilizando aceite. ¿Qué deberíamos hacer? ¿Tendría más sensibilidad este barómetro que el de mercurio?*

8. *¿Qué ocurre si inclinamos un barómetro?*

9. *¿Influye las variaciones de g con la latitud o altitud, en la presión atmosférica?*

10. *¿Puede ser cualquiera la sección de un barómetro?*

11. *Si variase la densidad media de la Tierra, ¿variaría la presión atmosférica?*

12. *Hinchando un neumático de bicicleta con una bomba, ¿realizamos una fuerza constante sobre el émbolo?*

PROBLEMAS

1. ¿Cuál es la presión en un punto situado a 30 m bajo el nivel del mar? Podemos tomar la densidad del agua del mar igual a 1,025 g/cm^3.

2. Un depósito cilíndrico de 200 cm^2 de sección se llena de agua con un grifo cuyo caudal es de 10 litros/s. Determinar la variación de la presión sobre el fondo en atmósferas/s.

3. En un depósito cilíndrico de sección 30 cm^2, introducimos 40 litros de agua y 25 kg de aceite. ¿Cuál es la presión sobre el fondo?

4. En un tubo en U tenemos mercurio. Por uno de los extremos vertemos agua que alcanza una altura de 25 cm sobre el nivel de mercurio. ¿Cuál es el desnivel entre la superficie libre del mercurio en las dos ramas? (densidad del agua 1 g/cm^3; la del mercurio 13,6 g/cm^3).

5. En un tubo en U que contiene mercurio cerramos un extremo y practicamos el vacío. ¿Cuál es el desnivel entre las dos columnas de mercurio si la presión atmosférica es 758 tor?

6. Una plancha de madera de densidad 0,85 g/cm^3 flota en el agua del mar (densidad 1.025 g/cm^3). La altura de la plancha es de 50 mm. ¿Cuál es la altura emergente?

7. Un cubo de corcho de masa 200 g y de volumen 400 cm^3, lo sumergimos en una vasija que contiene aceite y agua. Lo mantenemos sumergido de forma que la superficie de separación de los dos líquidos esté a la mitad de la altura del cubo. ¿Cuál es la fuerza necesaria para mantener el equilibrio? (densidad del aceite 0,8 g/cm^3).

8. Un cuerpo pesa 50 g en el aire y 35 g sumergido en agua destilada. ¿Cuál es su densidad?

9. Un cuerpo sumergido en agua destilada pesa 30 g. Sumergido en cierto líquido pesa 40 g y en el aire pesa 50 g. ¿Cuál es la densidad de aquel líquido?

10. Para determinar la densidad de un líquido utilizamos el método del frasco. Llenando un frasco con el líquido problema su masa es de 252,4 g. Lleno de agua destilada a 4°C es de 212,3 g. La masa del frasco es de 103,2 g. Sabiendo que el error absoluto máximo en las pesadas es de 0,05 g, hallar la densidad del líquido expresando la aproximación obtenida.

11. Tenemos un cuerpo de densidad 8 g/cm^3. Lo abandonamos dentro de un líquido de densidad 1,2 g/cm^3. ¿Cuánto tarda en recorrer 1 m?

12. Un globo está lleno de hidrógeno a 0° C y a 1 atm. de presión. La densidad del hidrógeno es 1/11 200 g/cm^3. El volumen del globo es de 400 litros. ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para evitar que ascienda? (densidad del aire 1,293 kg/m^3).

13. La presión atmosférica en la planta baja de un edificio es de 756 tor. ¿Cuál es la presión atmosférica en un piso situado a 12 m sobre la planta baja? (densidad del aire en aquellas condiciones 1,3 kg/m^3).

14. Dentro de una caja prismática de base 20 cm^2 tenemos aire a 500 tor. La presión atmosférica es de 754 tor. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre la parte superior?

15. Un recipiente de 40 litros contiene aire a 20 atm. de presión. ¿Cuál será el volumen ocupado por dicha masa de aire a la presión de 9500 newton/m^2? Se supone que no ha habido variación de temperatura.

16. Un recipiente de 20 litros contiene aire a 6 atm. de presión. Lo ponemos en comunicación con un recipiente de 8 litros en el cual habíamos hecho el vacío ¿Cuál es la presión del aire al final de la operación? Se supone temperatura constante.

17. Determinar la densidad del aire a 200 atm. de presión y a 0° C (la densidad del aire a 0° C y a 1 atm. es 1,293 kg/m^3).

18. ¿A qué presión el aire a 0°C tendría la misma densidad que un gas tal que a 0° C, 221 g de dicho gas ocupan 11,4 m^3?

SEGUNDA PARTE

CALOR

CAPÍTULO X

TERMOMETRÍA. DILATACIONES

Dilatación de sólidos. — Experimentalmente observamos que al variar la temperatura de un cuerpo varía su volumen. Caso de una varilla delgada o un hilo, observaremos que al aumentar su temperatura aumenta su longitud; a este aumento de longitud se le llama *dilatación lineal.* Cuando en un cuerpo cualquiera que al aumentar su temperatura aumenta su volumen, la dilatación de una de sus dimensiones constituye una dilatación lineal.

Supongamos una varilla de longitud l_1 a una temperatura t_1 y a una longitud l_2 a una temperatura t_2. Se llama *coeficiente de dilatación lineal medio* al aumento unitario de longitud dividido por el aumento de temperatura:

$$\lambda_m = \frac{\dfrac{l_2 - l_1}{l_1}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{l_1}\frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1},$$

lo cual podemos escribir

$$\lambda_m = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

El coeficiente de dilatación lineal a una temperatura t, es el límite a que tiende el coeficiente de dilatación lineal medio, entre la temperatura t y otra inmediata, al tender a cero la diferencia de temperaturas

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}$$

Cuando la diferencia de temperaturas es pequeña, el coeficiente de dilatación lineal puede considerarse constante, e igual al coeficiente de dilatación lineal medio en el intervalo de temperaturas considerados.

Despejando l_2 de la fórmula anterior tenemos:

$$l_2 = l_1 + \lambda l_1 (t_2 - t_1) = l_1[1 + \lambda(t_2 - t_1)];$$
$$\text{si} \quad t_1 = 0; \quad l_1 = l_0; \quad l_2 = l; \quad l = l_0(1 + \lambda t),$$

a $1 + \lambda t$ se le llama *binomio de dilatación.*

Si nos interesa el aumento de la superficie de un cuerpo al aumentar su temperatura estudiaremos la dilatación superficial. Se llama *coeficiente de dilatación superficial medio* en un intervalo de temperatura, al cociente entre el aumento unitario de superficie y el aumento de temperatura:

$$\sigma_m = \frac{\dfrac{S_2 - S_1}{S_1}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{S_1} \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

en general

$$\sigma_m = \frac{1}{S} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Podremos definir el coeficiente de dilatación superficial a una temperatura t

$$\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{S} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$$

Como antes, si el intervalo de temperaturas es pequeño, puede tomarse σ constante e igual al σ_m en el intervalo considerado. Despejando S_2,

$$S_2 = S_1[1 + \sigma(t_2 - t_1)]; \quad \text{si } t_1 = 0$$
$$S = S_0(1 + \sigma t)$$

Para hallar la relación existen entre λ y σ, consideremos una lámina cuadrada de lado 1 cm a 0° C. Si aumentamos la temperatura, cuando ésta vale t, el lado del cuadrado (considerado el cuerpo homogéneo e isótropo) mide $1 + \lambda t$, y su superficie $(1 + \lambda t)^2$; así pues,

$$S = S_0(1 + \sigma t) = 1 + \sigma t = (1 + \lambda t)^2 = 1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2$$

despreciando $\lambda^2 t^2$ por ser λ muy pequeño, resulta

$$\sigma = 2\lambda$$

es decir, el coeficiente de dilatación superficial es el doble del lineal.

Al considerar el aumento de volumen de un cuerpo definiremos el coeficiente de dilatación cúbica. Sean V_1 y V_2 los volúmenes de un cuerpo a las temperaturas t_1 y t_2 respectivamente. Se llama *coeficiente de dilatación* cúbica medio γ_m a

$$\gamma_m = \frac{\dfrac{V_2 - V_1}{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{V_1} \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}; \qquad \gamma_m = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

el coeficiente de dilatación cúbica a cierta temperatura t

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

razonando análogamente a los casos anteriores podemos tomar γ constante en un intervalo pequeño de temperaturas, y si $t_1 = 0$ escribimos:

$$V = V_0(1 + \gamma t)$$

Para hallar la relación existente entre γ y λ consideramos un cubo de arista unidad a 0° C. Cuando la temperatura es t, la arista vale $1 + \lambda t$, y el volumen $(1 + \lambda t)^3 = 1 + 3\lambda t + 3\lambda^2 t^2 + \lambda^3 t^3$
despreciando $3\lambda^2 t^2 + \lambda^3 t^3$ por ser λ muy pequeño, el volumen a la temperatura t es

$$1 + \gamma t = 1 + 3\lambda t, \qquad \gamma = 3\lambda$$

El coeficiente de dilatación cúbica es el triple del lineal.

Los coeficientes de dilatación tienen las dimensiones de grado $^{-1}$.

Dilatación de los líquidos. — El volumen de un líquido aumenta con la temperatura. Por estar contenidos en un recipiente, al calentar aumenta el volumen del recipiente a la vez que el del líquido. En este caso sólo se considera dilatación cúbica.

Definiremos dos coeficientes de dilatación:

a) El *coeficiente de dilatación aparente* es la relación entre el aumento unitario del volumen que aparentemente ocupa el líquido en una vasija y el aumento de la temperatura

$$\gamma_a = \frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{t}$$

b) El *coeficiente de dilatación real* es la relación entre el aumento unitario del volumen real del líquido y el aumento de temperatura.

Siendo V_r el volumen real del líquido

$$\gamma_r = \frac{V_r - V_0}{V_0 t}$$

supongamos el líquido en un recipiente que a 0° C es V_0. Cuando la temperatura es t, el volumen aparentemente ocupado por el líquido es V; el coeficiente de dilatación aparente es

$$\gamma_a = \frac{V - V_0}{V_0 t}; \quad \text{y} \quad V = V_0(1 + \gamma_a t)$$

y el coeficiente de dilatación real es

$$= \frac{V_r - V_0}{V_0 t}$$

Debido a la dilatación de la vasija,

$$V_r = V(1 + \gamma t)$$

(siendo γ el coeficiente de dilatación cúbica de la vasija); luego

$$V_r = V_0(1 + \gamma_a t)(1 + \gamma t)$$

$$\gamma_r = \frac{V_0(1 + \gamma_a t)(1 + \gamma t) - V_0}{V_0 t} = \frac{1 + \gamma t + \gamma_a t + \gamma_a \gamma t^2 - 1}{t}$$

$$\gamma_r = \gamma + \gamma_a + \gamma_a \gamma t$$

despreciando $\gamma_a \gamma t$ por ser $\gamma_a \gamma$ muy pequeño

$$\gamma_r = \gamma_a + \gamma$$

El coeficiente de dilatación real de un líquido es igual a la suma del coeficiente de dilatación aparente y el de la vasija que lo contiene.

La dilatación de líquidos se aplica a la construcción de termómetros.

Debido a la variación del volumen con la temperatura, tanto en los sólidos como en los líquidos la densidad varía con la temperatura.

Supongamos conocida la densidad a 0° C $d_0 = \frac{m}{V_0}$; la densidad d a una temperatura t es

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{d_0}{1 + \gamma t}$$

Esto hay que tenerlo presente al calcular la masa de un sólido o líquido que ocupa un volumen dado a una temperatura distinta de 0°C conociendo la densidad a 0°.

El coeficiente de dilatación de los líquidos acostumbra a ser mayor que el de los sólidos, por tanto la variación de la densidad con la temperatura es más notable en los líquidos.

Como aplicación estudiaremos la corrección de temperatura de una lectura barométrica (citada en las prácticas del capítulo 9).

La presión atmosférica vale $\rho g h_t$. La misma presión a 0° C sería $\rho_0 g h_0$; luego

$$\rho g h_t = \rho_0 g h_0, \qquad \frac{h_t}{h_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \gamma t$$

(siendo γ el coeficiente de dilatación del mercurio). Luego

$$h_0 = \frac{h_t}{1 + \gamma t}$$

Ésta es la altura de la columna de mercurio reducida a 0° C.

Debemos tener en cuenta la dilatación de la regla graduada. Sea λ el

coeficiente de dilatación lineal de la regla graduada. Si las divisiones son exactas a 0° C, a la temperatura t, debido a la dilatación, no tienen la misma longitud que a 0° C; una división mide $1 + \lambda t$. El verdadero valor de la altura medida es $h_0(1 + \lambda t)$, luego la lectura reducida a 0° C será

$$H_0 = h_t \frac{1 + \lambda t}{1 + \gamma t} \simeq h_t[1 + (\lambda - \gamma)t] = h_t[1 - (\gamma - \lambda)t]$$

Dilatación de los gases. — Cuando aumenta la temperatura de un gas pueden aumentar el volumen, la presión o la presión y el volumen simultáneamente. Consideremos un gas en un recipiente de forma que pueda dilatarse al aumentar la temperatura, permaneciendo constante la presión.

Definiremos el coeficiente de dilatación medio entre 0° C y una temperatura t a la relación

$$\alpha = \frac{V - V_0}{V_0 t}; \qquad V = V_0(1 + \alpha t)$$

Experimentalmente se encontró que el coeficiente de dilatación de un gas es independiente de la temperatura y de la presión a la que el gas está sometido. Su valor, el mismo para todos los gases, es $\frac{1}{273}$ aproximadamente.

Si mantenemos constante el volumen ocupado por el gas y aumentamos la temperatura, la presión del gas aumenta. Se puede definir un coeficiente de aumento de presión medio:

$$\beta = \frac{p - p_0}{p_0 t}$$

de donde

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

Un gas cuyo coeficiente de dilatación se mantenga constante y cumpla la ley de Boyle se llama *gas ideal* o *perfecto*. Esperimentalmente se comprueba que para estos gases aproximadamente $\alpha = \beta$.

A la presión normal y a 0° C los gases que más se aproximan al gas ideal son el hidrógeno y el helio.

Las variaciones de la presión con la temperatura se utilizan para la construcción de termómetros de gases.

Se mide la presión p a cierta temperatura, y de aquí se calcula la temperatura, siempre que conozcamos la presión en otros puntos, por ejemplo a 0° C y a 100° C.

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0(1 + \beta t); & \beta &= \frac{p - p_0}{p_0 t} \\ p_{100} &= p_0(1 + 100\beta); & \beta &= \frac{p_{100} - p_0}{p_0 \cdot 100} \end{aligned}\right\} \frac{p - p_0}{p_0 t} = \frac{p_{100} - p_0}{p_0 \cdot 100}$$

de donde

$$t = \frac{p - p_0}{p_{00} - p_0} \cdot 100$$

Para estos termómetros se utiliza generalmente hidrógeno, u otro gas que pueda considerarse gas perfecto.

A la escala de temperaturas determinada por este método se le llama *escala del gas perfecto.*

Escala absoluta de temperatura. — Lord Kelvin introdujo una escala de temperaturas llamada *absoluta,* relacionada con la centígrada por la expresión:

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273$$

Para hallar la temperatura absoluta basta sumar 273 a la temperatura centígrada. El aumento de temperatura absoluta es igual al aumento de temperatura centígrada:

$$\left.\begin{array}{l} T_2 = t_2 + 273 \\ T_1 = t_1 + 273 \end{array}\right\} \; T_2 - T_1 = t_2 - t_1$$

Para indicar que una temperatura es absoluta, se escribe después de la temperatura °K.

Por ejemplo: 0°C son 273°K.

T se anula a la temperatura centígrada —273. A esta temperatura se le llama *cero absoluto,* y se escribe 0°K.

Ecuación de estado de los gases perfectos. — Se llaman *variables de estado* a la presión, el volumen y la temperatura. Supongamos un gas perfecto. Queremos hallar una ecuación que nos relacione las variables de estado de cierta masa del citado gas, al experimentar cierta evolución. A esta ecuación se le llama *ecuación de estado.* Partimos de un estado inicial de una masa gaseosa, definido por: su temperatura 0°C, su presión $p_0 = 1$ atm., y su volumen V_0. Manteniendo constante la presión p_0 aumentamos la temperatura hasta un valor t. El volumen ocupado por el gas será: $V' = V_0(1 + \alpha t)$. Manteniendo constante la temperatura, variamos su presión. Sea p la presión final y V el volumen ocupado por el gas. Según la ley de Boyle $p \cdot V = p_0 \cdot V'$, sustituyendo V' por su valor $V' = V_0(1 + \alpha t)$

$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t)$$

Si el volumen no hubiese variado $p = p_0(1 + \alpha t)$. Comparando esta relación con la $p = p_0(1 + \beta t)$, deducimos que $\alpha = \beta$ (esto se había citado antes como comprobado experimentalmente).

La ecuación de estado anterior puede escribirse:

$$pV = p_0 V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right)$$

y recordando la definición de temperatura absoluta

$$T = t + \frac{1}{\alpha}$$

$$pV = p_0 V_0 \alpha T = p_0 V_0 \frac{1}{273} T; \qquad \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{273} = \text{cte.}$$

$p \cdot V = T \cdot \text{cte.}$ Si $T = \theta$, debe ser nula la presión o el volumen. Esta temperatura $T = 0$, es la temperatura más baja que puede existir, por esto se llama *cero absoluto*. Los gases reales antes de alcanzar el cero absoluto se licuan y no cumplen la ecuación anterior.

Aplicaciones. — 1.ª Determinar el volumen ocupado por un gas en condiciones normales ($t = 0°C$; $p = 1$ atm.)

$$V_0 = \frac{pV}{p_0 T} \cdot 273$$

Ejemplo. — Tenemos 8 litros de hidrógeno a 27°C y a 3 atm. de presión. ¿Qué volumen ocupan en condiciones normales?

$$V_0 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 273}{1 \cdot (273 + 27)} = \frac{24 \cdot 273}{300} = 21{,}84 \text{ litros}$$

2.ª Determinación de la masa y la densidad de un gas que ocupa el volumen V a la presión p conociendo la densidad a 0°C y a una atmósfera de presión.

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{273}; \qquad V_0 = \frac{273}{T} \frac{p}{p_0} V$$

$$m = V_0 d_0 = \frac{273}{T} \frac{p}{p_0} V d_0$$

$$d = \frac{m}{V} = \frac{273}{T} \frac{p}{p_0} d_0$$

Hipótesis de Avogadro. — Avogadro para explicar los resultados de la ley química de los volúmenes de combinación, imaginó la hipótesis de que: *todos los gases que ocupan el mismo volumen a la misma presión y temperatura, tienen el mismo número de moléculas.*

Experimentalmente puede comprobarse que la hipótesis de Avogadro es aproximada, pero si los gases son perfectos, cumplen exactamente dicha hipótesis.

De la hipótesis de Avogadro se deduce que la molécula gramo o mol de cualquier gas en condiciones normales de presión y temperatura ocupa el mismo volumen. A este volumen se le llama *volumen molar.*

Experimentalmente se ha determinado el volumen molar, que vale 22,4 litros.

En las mismas condiciones un kilomol de cualquier gas ocupa 22,4 m^3. Por distintos procedimientos físicos se ha determinado el número de moléculas contenidas en el volumen molar en condiciones normales (que es el número de moléculas que constituyen un mol). Este número, llamado número de Avogadro, vale $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol.

Ecuación pv = nRT. — Consideremos la ecuación de estado de los gases perfectos citada antes $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{273} = \text{cte}$. Siendo n el número de moles y V_m el volumen molar, evidentemente $V_0 = nV_m$

$$\frac{pV}{T} = p_0 \frac{n\dot{V}_m}{273} = nR$$

llamando R a $\frac{p_0 V_m}{273}$. Esta R es una constante universal, ya que $p_0 = 1$ atmósfera, 273 y $V_m = 22{,}4$ litros son constantes.

Dimensiones de R:

$$[R] = \frac{[p]\left[\frac{V}{\text{mol}}\right]}{°\text{K}} = \frac{\left[\frac{F}{L^2} \cdot L^3\right]}{°\text{K mol}} = \frac{[F] \cdot [L]}{°\text{K mol}} = \frac{\text{Trabajo}}{°\text{K mol}};$$

luego se medirá en ergios/°K o julios/°K en el sistema C. G. S. o M. K. S., respectivamente.

Valores de R:

Sistema C. G. S.:

$$R = \frac{1{,}0133 \cdot 10^6 \cdot 22\,400}{273} = 8{,}3 \cdot 10^7 \text{ ergios/°K·mol}$$

Sistema M. K. S.:

$$R = \frac{1{,}0133 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0224}{273} = 8{,}3 \text{ julios/°K·mol}$$

Expresando p_0 en atmósferas y V_m en litros:

$$R = \frac{1 \cdot 22{,}4}{273} = 0{,}082 \text{ atm. litro/°K·mol}$$

La ecuación anterior $\frac{pV}{T} = nR$ podemos escribirla $pV = nRT$.

Conociendo la masa molecular M y la masa m del gas, podemos hallar n, ya que $n = \frac{m}{M}$; la ecuación anterior se escribe:

$$pV = \frac{m}{M} RT; \quad \text{la masa} \quad m = \frac{pVM}{RT}$$

Para determinar la densidad d de un gas a cualquier presión y temperatura utilizamos esta ecuación:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

Dados dos gases a la misma presión y temperatura:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{pM_1}{RT} \\ d_2 &= \frac{pM_2}{RT} \end{aligned}\right\} \frac{d_1}{d_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

sus densidades están en razón directa de sus masas moleculares.

Para determinar el número de moléculas que ocupan un volumen V a la presión p y temperatura T, operaremos del siguiente modo:

en un mol el número de moléculas $= N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$,
en n moles el número de moléculas es nN;

como $n = \frac{pV}{RT}$, el número de moléculas será:

$$N' = \frac{pV}{RT} N$$

Ejemplo. — ¿Cuál es el número de moléculas en un recipiente de 20 cm^3, en el cual se ha practicado el vacío hasta que la presión sea $p = 10^{-5}$ tor, siendo la temperatura 27°C?

$$p = 10^{-5} \text{ tor} = 133{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ newton/m}^2$$
$$V = 20 \text{ cm}^3 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$T = 27 + 273 = 300\,^\circ\text{K}$$
$$N' = \frac{133{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{8{,}3 \cdot 300} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 64{,}2 \cdot 10^{11} \text{ moléculas.}$$

PRÁCTICAS

Comprobación de puntos fijos auxiliares. — Para el calibrado de un termómetro se toman como puntos fijos el punto de fusión del hielo y la temperatura de ebullición del agua a la presión de una atmósfera que en la escala centígrada corresponden a las temperaturas 0° C y 100° C respectivamente.

Dado un termómetro, podemos comprobar dichos dos puntos. Para comprobar

el punto cero tomaremos un embudo o una vasija con un desagüe en el fondo. Machacamos hielo y lo vamos colocando en la vasija rodeando el termómetro hasta que llegue a las proximidades de la división cero. Se empapa el hielo de agua destilada y se va observando la columna de mercurio, que va descendiendo, quedando finalmente estacionada en cierta división. La diferencia entre esta división y cero nos dará el error de cero. Éste puede ser positivo o negativo según que se estacione bajo cero o sobre cero. Para comprobar el punto 100 se utiliza el aparato de Regnault (fig. 84). Se hace hervir agua teniendo el

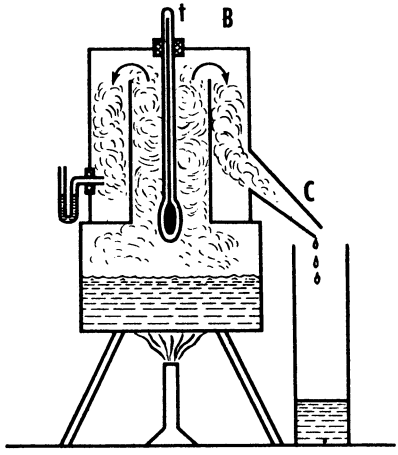


FIG. 84

termómetro colocado de forma que el depósito quede por encima del nivel del agua y que sobresalga en la parte superior lo justo para hacer la lectura (que sobresalga un poco la división 100). El termómetro se sujeta con el tapón *B* y puede subirse o bajarse ya que ajusta suavemente en el orificio del tapón. Cuando empieza a salir vapor por el tubo *C* esperamos unos minutos y luego hacemos la lectura en el termómetro. Hay que determinar la presión atmosférica, para lo cual utilizamos un barómetro (que deberemos corregir, según se vio en el capítulo anterior). Por medio de unas tablas (véase pág. 185) hallamos la temperatura de ebullición del agua a la presión atmosférica actual. La diferencia entre esta temperatura y la leída en el termómetro, nos dará el error correspondiente al punto 100.

Ejemplo: Supongamos que la temperatura leída en el termómetro correspondiente al hielo fundente sea —0,5° C La temperatura se ebullición del agua para la presión ambiente, de 750 tor es 99,63° C y supongamos que la correspondiente lectura es 99,3° C. La columna de mercurio en 99,63° C se ha desplazado $0,5 + 99,3 = 99,8$. Una división del termómetro vale $\frac{99,63}{99,8}$. Cuando el termómetro indique una temperatura t la verdadera temperatura será $t' = (t° + 0,5°)\frac{99,63}{99,8}$

Si queremos comprobar otros puntos fijos llamados auxiliares, podemos tomar los puntos de ebullición de líquidos conocidos (véase tabla pág. 184), o puntos de fusión de ciertos cuerpos de los cuales conocemos la temperatura del citado punto de fusión (véase tabla pág. 190).

Para comprobar el punto de ebullición se sustituye el agua por otro líquido en el aparato de Regnault (puede utilizarse tetracloruro de carbono $t_e = 76{,}8$°C, alcohol etílico $t_e = 78{,}26$°C o algún otro líquido dado en la tabla antes citada). (Debe tenerse presente que el alcohol es inflamable y si se quiere utilizar dicho líquido es preferible calentar con un hornillo eléctrico.)

La corrección para la temperatura de ebullición del alcohol etílico, a presiones poco diferentes de 760 es de 0,034°C por tor. Podemos dar la temperatura de ebullición para una presión atmosférica p_A:

$$t = 78{,}26 + 0{,}034\ (p_A - 760); \qquad (p_A \text{ en tor})$$

Para comprobar un punto de fusión o solidificación, puede utilizarse cualquier cuerpo de la tabla (pág. 190). Puede usarse benceno, que es líquido a la temperatura ambiente y se solidifica a 5,48°C. Se introduce el benceno en un tubo de ensayo con un termómetro y se sumerge dicho tubo en una mezcla frigorífica (hielo machacado con sal común). Vamos anotando temperaturas en el transcurso del tiempo, sacudiendo ligeramente el tubo para evitar la *subfusión* (véase capítulo 12). Cuando la temperatura es estacionaria, tendremos la temperatura de solidificación.

Medida del coeficiente de dilatación de un gas. — (Experiencia de cátedra.) Podemos utilizar un matraz aforado, que se prolonga en un tubo graduado.

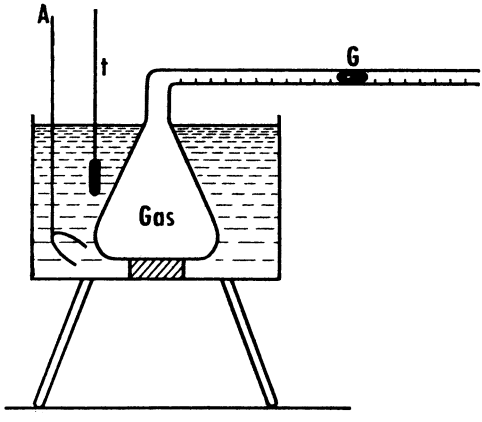


FIG. 85

Determinaremos el coeficiente de dilatación del aire encerrado en el matraz, para lo cual introduciremos una gota de mercurio en el tubo horizontal prolongación del matraz (fig. 85). Para introducir la gota de mercurio, se calienta el matraz y se coloca una gota de mercurio en el extremo del tubo colocado vertical. Al enfriarse el aire penetra la gota por el tubo. Se coloca el tubo horizontal y veremos que la gota queda estacionada. En este instante la presión interior es

igual a la atmosférica. Colocamos el matraz en un recipiente con agua a la temperatura ambiente. Dentro del agua se coloca un termómetro y con un agitador removemos el líquido para que la temperatura sea uniforme. Leemos la indicación del termómetro; sea t_1. Anotamos la división v_1 ocupada por el borde de la gota G próxima al matraz.

Calentamos el recipiente removiendo el agua con el agitador y cuando el termómetro ha subido unos grados, se retira el foco calorífico anotando la temperatura t_2 indicada por el termómetro, en el momento de iniciar el descenso, así como la división V_2 ocupada por el borde de la gota próximo al matraz. La presión será constante igual a la atmosférica.

El coeficiente de dilatación α será:

$$\alpha = \frac{1}{V + V_1} \frac{(V + V_2) - (V + V_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\alpha = \frac{1}{V + V_1} \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

siendo V el volumen del matraz y V_1 y V_2 los volúmenes en el tubo.

Para medidas de mayor precisión debemos tener en cuenta la dilatación del matraz.

Medida del coeficiente de dilatación aparente de líquidos. —Podemos utilizar el *dilatómetro* (fig. 86). Consiste en un tubo delgado con un depósito en su parte inferior, de aspecto parecido al de un termómetro. El tubo está graduado en partes iguales (del mismo volumen). Hace falta conocer el volumen del depósito hasta la división cero y el volumen de una división. Si no los conocemos, podemos hallarlos. Llenamos el tubo de mercurio hasta la división cero. Se pesa, procurando que la pesada sea de la mayor precisión posible (puede utilizarse el método de carga constante). Se pesa lleno de mercurio hasta cierto número de divisiones n. Se pesa vacío y este resultado se resta de las pesadas anteriores. Así tenemos la masa de mercurio que ocupa el depósito hasta la división cero y la que ocupa el depósito hasta la división cero más la que ocupa n divisiones. Dividiendo por la densidad del mercurio a la temperatura que se ha operado, tenemos el volumen V_0 y el volumen $V' = V_0 + nv$, siendo v el volumen de una división y V_0 el volumen del depósito hasta la división cero.

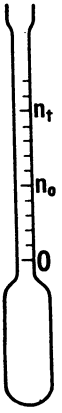


FIG. 86

De aquí despejamos v:

$$n_0 = n_1 \qquad n_t = n_2 \qquad v = \frac{V' - V_0}{n}$$

Vamos a determinar el coeficiente de dilatación aparente de un líquido. Llenamos el depósito y parte del tubo con el líquido problema. Enfriamos a 0°C y anotamos la división n_1 correspondiente a la superficie libre del líquido. Introducimos el dilatómetro con el líquido en un recipiente con agua a cierta temperatura t. Anotamos la correspondiente división n_2. El coeficiente de dilatación aparente será:

$$V_a = \frac{V - V_\rho}{V_0 t} = \frac{V_0 + n_2 v - (V_0 + n_1 v)}{(V_0 + n_1 v)\, t} = \frac{v\,(n_2 - n_1)}{(V_0 + n_1 v)\, t}$$

Experimento de Hope. — Dicho experimento sirve para mostrar que el agua tiene máxima densidad a 4°C. Se realiza con una probeta con dos orificios laterales uno en la parte superior y otro en la inferior. A cada uno colocamos un termómetro que ajusta al orificio con un tapón (fig. 87). Se llena la probeta

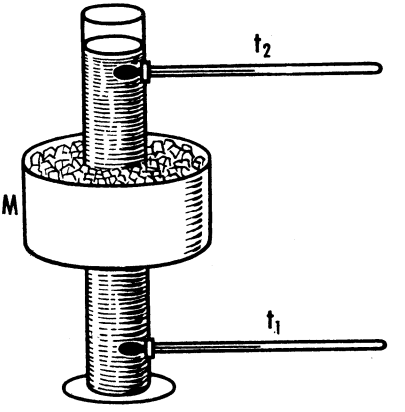


FIG. 87

con agua y se enfría con un recipiente *M* que contiene hielo. El termómetro inferior indica una temperatura más baja que el superior, pero al llegar a 4°C la indicación del termómetro inferior queda estacionaria mientras el termómetro superior continúa descendiendo y puede llegar a 0°C. Esto comprueba que la densidad del agua a 4°C es máxima pues debido a su mayor densidad queda en el fondo.

Puede hacerse el experimento sin el recipiente *M*. Se llena la probeta de agua a cero grados. El agua se calienta lentamente por contacto con el aire. Notaremos que el termómetro superior indica 0° mientras que el inferior asciende hasta 4° y mantiene esta indicación. Al cabo de poco, el termómetro superior va ascendiendo hasta que su indicación coincide con la temperatura ambiente, mientras el inferior asciende más lentamente.

A continuación damos una tabla con la densidad del agua a distintas temperaturas.

Temperatura	Densidad g/cm³	Temperatura	Densidad g/cm³
0°C	0,9998	15°C	0,9991
2°	0,9999	20°	0,9982
4°	1,0000	25°	0,9968
6°	0,9999	30°	0,9956
8°	0,9998	40°	0,9922
10°	0,9997	50°	0,9881
		100°	0,9584

CUESTIONES

1. *Describan un termómetro (para altas temperaturas) basado en la dilatación de una varilla.*

2. *¿Aumenta la sensibilidad de un termómetro al aumentar el volumen del depósito?*

3. *¿La longitud reducida de un péndulo físico aumenta con la temperatura?*

4. *Un sólido flota en un líquido. ¿Aumentado la temperatura del conjunto lograríamos que el sólido se hundiese? Discutir la posibilidad.*

5. *Queremos aforar una vasija a una temperatura determinada. Conociendo la densidad del mercurio a la temperatura fijada, explicar el procedimiento que podemos utilizar.*

6. *Explicar cómo determinaríamos el coeficiente de dilatación real de un líquido, con la balanza de Mohr o la hidrostática.*

7. *¿La masa de alcohol contenido en un litro de vino es la misma en verano que en invierno?*

8. *¿La masa del aire contenido en una habitación, a igualdad de presión es la misma en verano que en invierno?*

9. *Dos gases ocupan el mismo volumen a la misma temperatura. Si las presiones son distintas, ¿cuál de ellas tiene mayor número de moléculas?*

10. *Dos gases tienen distinta masa molecular. Estando a la misma presión y temperatura, ¿cuál de los dos tiene mayor densidad?*

PROBLEMAS

1. Una viga de hierro mide 10 m a 0°C. ¿Cuál es su longitud a —10°C y a 10°C.? (Coeficiente de dilatación lineal del hierro $12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

2. Una regla graduada de latón es exacta a 0°C. Medimos una longitud de 60 cm a 30°C. ¿Qué error cometemos en la medida? (Coeficiente de dilatación lineal del latón $19 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

3. Una pequeña masa pende de un hilo de cobre de cierta longitud. Se hace oscilar como péndulo simple a 0°C siendo su período 1 seg. Cuánto retrasa al día si la temperatura es de 20°C? (Coeficiente de dilatación lineal del cobre $17 \cdot 10^{-6}$.)

4. El diámetro de un disco homogéneo es de 3 cm a 0°C y 3,02 cm a 120°C. ¿Cuál es el coeficiente de dilatación superficial?

5. Un matraz está aforado a 15°C, siendo su capacidad un litro. ¿Cuál es su capacidad a 35°C? (Coeficiente de dilatación lineal del vidrio $4 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

6. Un recipiente de hierro contiene mercurio a 10°C que lo llena totalmente. Calentamos a 30°C y se derraman 2 cm^3 de mercurio. ¿Cuál era el volumen inicial? (Coeficiente de dilatación del mercurio 0,00018 grad^{-1} y el lineal del hierro $12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

7. Un recipiente de 10 litros está lleno de aire a 3 atm. y a la temperatura de 27°C. ¿Cuál es la masa del aire contenido en el recipiente?

8. Del recipiente del problema anterior sale aire hasta que la presión interior es de 800 tor. ¿Qué cantidad de aire ha salido?

9. Tenemos 20 litros de oxígeno a 2,4 atm, y a 17°C. ¿Cuál es su masa?

10. ¿Cuál debe ser la presión en el interior de una vasija de 50 cm^3, que contiene hidrógeno a 17°C, para que el número de moléculas que contiene sea 10^{20}?

11. Tenemos oxígeno a 750 tor y 27°C. ¿Cuál es el número de moléculas por cm^3?

CAPÍTULO XI

CALORIMETRÍA

Calores específicos de sólidos y líquidos. — Experimentalmente se encuentra que para elevar la temperatura de un cuerpo cierto número de grados, la cantidad de calor necesaria es proporcional a su masa. Si tenemos dos cuerpos distintos de igual masa y les comunicamos una misma cantidad de calor a cada uno de ellos, la elevación de temperatura es distinta, en general, para cada cuerpo. El aumento de temperatura experimentado por un cuerpo al comunicarle cierta cantidad de calor, depende de su masa y de la sustancia que lo constituye.

Podemos definir el calor específico medio de un cuerpo, entre dos temperaturas, al cociente entre la cantidad de calor comunicada y el producto de la masa del cuerpo por la elevación de temperatura:

$$c_m = \frac{Q}{m(t' - t)}$$

si al calor comunicado le llamamos ΔQ y a la diferencia de temperaturas Δt

$$c_m = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Para los sólidos, el calor específico es prácticamente constante (en un intervalo de temperaturas pequeño) y por tanto tomaremos el calor específico medio igual al calor específico a una temperatura determinada de este intervalo.

Si en la fórmula anterior hacemos $m = 1$ y $\Delta t = 1$, vemos que el calor específico coincide numéricamente con la cantidad de calor necesaria para que la temperatura de la unidad de masa aumente en un grado.

Para los líquidos se aplica la misma definición. Los calores específicos de los líquidos acostumbran a ser mayores que los de los sólidos. El calor específico de los líquidos varía con la temperatura, pero puede considerarse

constante en intervalos de temperaturas no muy grandes. El calor específico a una temperatura determinada sería:

$$c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt}$$

(Hay que tener presente que incluso en los sólidos para intervalos de temperatura grandes el calor específico no es constante.)

El calor específico del agua es igual a 1. Se deduce de la definición de caloría (calor necesario para aumentar en un grado la temperatura de un gramo de agua). En realidad esto es cierto a 15°C, pero prácticamente podemos tomar este calor específico igual a 1, para cualquier temperatura desde 0°C a 100°C.

Según su definición, el calor específico se mide en calorías/gramo·grado o en kilocalorías/kilogramo·grado. El calor específico del agua es

1 caloría/gramo·grado.

Para los cuerpos simples, Doulong y Petit enunciaron la siguiente ley: El producto del peso atómico de un elemento por su calor específico es constante y vale 6,4 calorías/mol·grad. Esta ley es aproximada. A muy bajas temperaturas no se cumple.

De la fórmula que nos define el calor específico despejamos Q y tenemos $Q = m \cdot c\Delta t$. Al producto $m \cdot c$ se le llama *capacidad calorífica*. Se mide en cal/grado.

Calores específicos en cal/gramo·grado de algunas sustancias

SÓLIDOS		LÍQUIDOS	
Plomo	0,03	Mercurio	0,03
Platino	0,04	Aceite de olivas	0,31
Plata	0,05	Alcohol etílico	0,58
Estaño	0,06	Glicerina	0,58
Cinc	0,09	Alcohol metílico	0,59
Cobre	0,09	Agua	1,00
Latón	0,09		
Hierro	0,11		
Vidrio	0,19		
Aluminio	0,21		

Medidas calorimétricas. — Son medidas experimentales de las cantidades de calor absorbidas o desprendidas, por un sistema de cuerpos al ponerlos en contacto, o de las cantidades de calor que intervienen en un fenómeno.

Uno de los métodos más corrientes en calorimetría es el *método de las mezclas*. Se basa en determinar el calor absorbido o desprendido por un

cuerpo, o en un fenómeno, calculando la disminución o el aumento de la cantidad de calor de una masa de agua, contenida en un recipiente, de la cual medimos su temperatura inicial y final.

Para evitar pérdidas de calor en el transcurso de la operación se usa un recipiente especial llamado *calorímetro*. Este aparato (fig. 88) consta

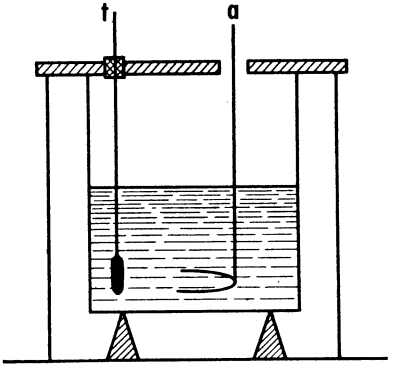


FIG. 88

de un recipiente de latón de paredes delgadas y pulimentadas. Se apoya por medio de tacos de madera (para evitar pérdidas por conducción) sobre el fondo de otro recipiente de paredes pulimentado interiormente, para evitar pérdidas por radiación. Llenamos parcialmente de agua el primer recipiente y sumergimos un termómetro. Para que la distribución de temperaturas sea lo más homogénea posible, se remueve el agua con un agitador.

Leemos la temperatura inicial del agua t_0, que será la misma que la del agitador y recipiente. Sumergimos en el agua un cuerpo a la temperatura t. Agitamos y al cabo de unos minutos la temperatura se estabiliza. Leemos la nueva temperatura t'. La cantidad de calor cedida por el cuerpo será $m \cdot c(t - t')$, y la ganada por el agua, recipiente, termómetro y agitador

$$m_v c_v(t' - t_0) + m_t c_t(t' - t_0) + m_a c_a(t' - t_0) + M(t' - t_0)$$

(M, masa del agua; m_v, masa de la vasija; m_t, masa del termómetro; m_a, masa del agitador; c_v, c_t, c_a, calores específicos de la vasija, termómetro y agitador.)

Como el calor cedido por el cuerpo debe ser igual al ganado por el agua:

$$mc(t - t') = (m_v c_v + m_t c_t + m_a c_a + M)(t' - t_0)$$

Se llama valor en agua de un calorímetro a

$$m_v c_v + m_t c_t + m_a c_a = A$$

que equivale a una masa de agua que comunicándole la misma cantidad de calor sufriese la misma elevación de temperatura.

Por tanto, en el calorímetro es como si hubiese una masa de agua M más una masa ficticia A. La fórmula anterior se escribe:

$$mc(t - t') = (M + A)(t' - t_0)$$

A es una constante del aparato que se puede hallar experimentalmente (véase Prácticas). De esta igualdad se puede despejar cualquier variable desconocida. Para calcular el calor específico del cuerpo despejaremos c:

$$c = \frac{(M + A)\,(t' - t_0)}{m(t - t')}$$

(Para la determinación de c con las correcciones debidas, véase Prácticas.)

Podemos determinar la temperatura t del cuerpo antes de sumergirlo en el calorímetro supuesto conocido c.

Ejemplo: Para conocer la temperatura de una llama, calentamos durante un tiempo suficiente en dicha llama una masa de cobre de 80 g (calor específico del cobre: $c = 0{,}09$ cal/g/grado). Luego la introducimos en un calorímetro que contiene 400 g de agua a 20°C y la temperatura se eleva a 37°C. ¿Cuál es la temperatura de la llama? (Valor en agua del calorímetro: 50 g.)

$$mc(t - t') = (A + M)(t' - t_0)$$

$$t = \frac{(A + M)\,(t' - t_0)}{mc} + t' = \frac{450\,(37 - 20)}{80 \cdot 0{,}09} + 37 = 1038\,^{\circ}\mathrm{C}$$

El método de las mezclas permite determinar también el calor específico de los líquidos. Basta introducir en el calorímetro, en lugar de agua, el líquido del cual deseamos conocer su calor específico, después de haber determinado su masa. Introducimos un sólido del cual conocemos su calor específico, masa y temperatura. Sean c_L el calor específico del líquido, y m_L su masa. Operando análogamente al caso anterior:

$$mc(t' - t) = (A + m_L c_L)(t' - t_0)$$

$$c_L = \frac{1}{m_L}\left[\frac{mc\,(t - t')}{t' - t_0} - A\right]$$

Puede utilizarse como vasija calorimétrica un *vaso de Dewar*, que consiste en una vasija de vidrio de paredes dobles, entre las cuales se ha hecho el vacío (para evitar pérdidas por conducción y convección), y las paredes están plateadas para evitar pérdidas por radiación. Los vasos de Dewar se aplican a los usos domésticos para la construcción de termos.

El método de la fusión del hielo se utiliza en el *calorímetro de Bunsen*. Consta de un recipiente de vidrio (fig. 89) encorvado y que termina en un delgado tubo T graduado en mm^3. En la parte superior tiene un reci-

piente R. El tubo en A contiene agua y también mercurio que llena el resto hasta el tubo horizontal T: todo está sumergido en hielo machacado.

Evaporando en R éter o cloruro de etilo, se enfría y queda en sus paredes exteriores (en C) una capa de hielo.

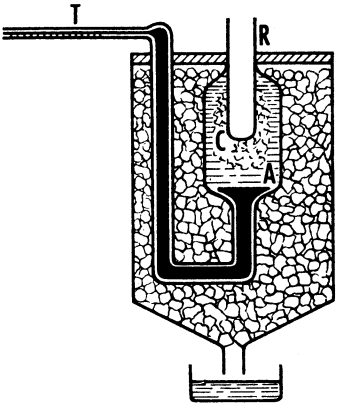


FIG. 89

Anotamos la división donde se estaciona el extremo de la columna de mercurio en T.

Se introduce en R un cuerpo a una temperatura t y de masa m. El calor cedido al recipiente produce fusión del hielo de la parte exterior de R, y con ello una disminución de volumen en A, que se traduce en un retroceso del mercurio en T. Leemos la división correspondiente. Su diferencia con la lectura inicial nos da la disminución del volumen, y por tanto (sabiendo las densidades del hielo y del agua a 0°C) la masa de hielo fundida. Sabiendo que para fundir 1 g de hielo se necesitan unas 80 calorías, podemos determinar la cantidad de calor Q cedida por el cuerpo. Como $Q = mc(t - 0) = mct$, podemos hallar c.

En lugar de determinar en cada caso la masa de hielo fundida, se halla la cantidad de hielo que al fundir hace retroceder una división de la escala en T. De esta forma, sabiendo el número de divisiones retrocedidas por la fusión de 1 g de hielo, hallamos directamente Q, y luego aplicamos la fórmula anterior. Es decir, si n es el número de divisiones recorridas por el extremo del mercurio en T por la fusión de 1 g de hielo:

$$80 \cdot n = mct; \qquad c = \frac{80n}{m \cdot t}.$$

Calores específicos de gases. — En los gases debemos considerar dos calores específicos: a *presión constante* y a *volumen constante*. El calor específico medio de un gas a presión constante es igual a la cantidad de calor

comunicada al gas dividida por el producto de su masa por la elevación de temperatura, permaneciendo constante la presión.

$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{p=cte.}$$

El calor específico a presión constante a una temperatura dada es

$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{p=cte.}$$

El calor específico de un gas a volumen constante se define igual que el anterior, pero manteniendo constante el volumen ocupado por el gas.

El calor específico medio a volumen constante

$$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{v=cte.}$$

cierta temperatura

$$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{v=cte.}$$

El calor específico c_p es siempre mayor que c_v. Para el aire:

$$c_p = 0{,}2347 \text{ cal/g·grado}; \qquad c_v = 0{,}169 \text{ cal/g·grado}$$

Definimos los calores molares de un gas (siendo n el número de moles):

$$C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{p=cte.} \qquad C_v = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{v=cte.}$$

Como $\Delta t = \Delta T$

$$C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{p=cte.} \qquad C_v = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{v=cte.}$$

Como $n = \frac{m}{M}$ (siendo M la masa molecular):

$$C_p = \frac{M}{m}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{p=cte.} = Mc_p; \qquad C_v = \frac{M}{m}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{v=cte.} = Mc_v$$

La relación C_p/C_v es una constante que depende del tipo de gas.

Para los monoatómicos $\frac{C_p}{C_v} = 1{,}7$.

Para los biatómicos $\frac{C_p}{C_v} = 1{,}4$.

Para los triatómicos $\frac{C_p}{C_v} = 1{,}3$.

Se demuestra en termodinámica que la diferencia de los calores molares de un gas perfecto es igual a la constante de los gases R.

$$C_p - C_v = R$$

Expresando R en calorías/°K·mol:

$$C_p - C_v = 2 \text{ cal/°K·mol}$$

Problema:

Tenemos un recipiente cuyo volumen es 20 m^3. Este recipiente contiene aire a la presión de 760 tor. La temperatura inicial es 0°C. ¿Cuál es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura hasta 30°C estando cerrada la vasija? (Calor específico a volumen constante del aire 0.17 cal/g·grado, densidad del aire a 0°C y 1 atm., 1,293 kg/m^3.)

$$Q = mc_v\Delta t; \qquad m = Vd = 20 \cdot 1{,}293 = 25{,}86 \text{ kg}$$

$$Q = 25{,}86 \cdot 0{,}17 \cdot 30 = 131{,}886 \text{ kilocalorías}$$

PRÁCTICAS

Determinación del valor en agua de un calorímetro. — Haremos la determinación, con el calorímetro que será el usado en las prácticas siguientes. Puede servir de calorímetro, un vaso Dewar (un termos de boca ancha).

Llenamos parcialmente el calorímetro (poco menos de la mitad) con agua calentada a unos 50°C, de la cual conocemos su masa m por pesada previa. Se sumerge un termómetro que tenga la mayor sensibilidad posible (que será

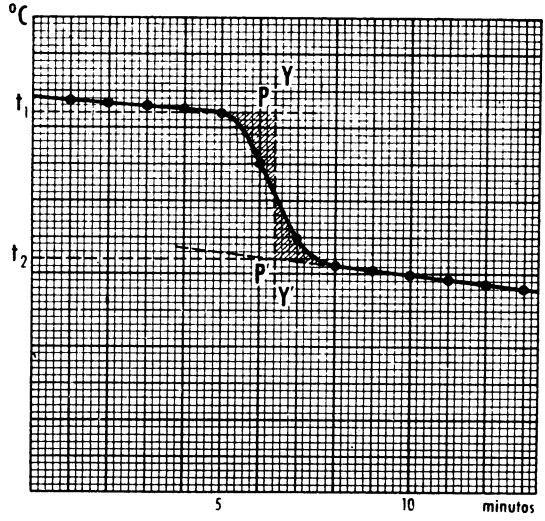


FIG. 90

el que usaremos en las sucesivas prácticas). Con un agitador (puede ser una varilla de vidrio encorvada en su parte inferior) se remueve el líquido y se va tomando la temperatura de medio minuto en medio minuto. Pasados cinco minutos se vierte en el calorímetro una masa m de agua a la temperatura ambiente. Se continúa tomando la temperatura de la mezcla durante unos 15 minutos (persistiendo en la agitación del líquido).

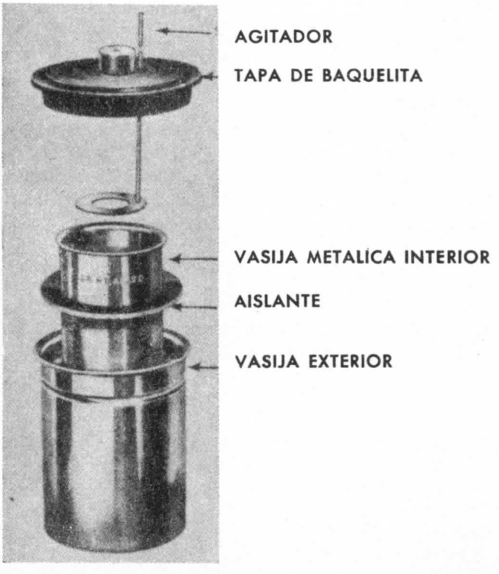
Se representa gráficamente la temperatura en función del tiempo, obteniendo una gráfica parecida a la de la fig. 90. Se traza la ordenada YY de modo que las dos zonas rayadas tengan la misma área. Se toma como descenso de temperatura $t_1 - t_2$ (corregido de las pérdidas por radiación) el determinado por el segmento PP' sobre el eje de temperaturas.

Aplicando la fórmula del método de las mezclas, siendo t la temperatura del agua añadida, tenemos:

$$(m + A)\ (t_1 - t_2) = m'\ (t - t_2)$$

de donde

$$A = \frac{m'\ (t - t_2)}{t_1 - t_2} - m \text{ cal/grado}$$



Diversas partes de un calorímetro

Determinación del calor específico de un sólido por el método de las mezclas. — Determinamos la masa m del cuerpo, cuyo calor específico queremos hallar, pesando por el método de carga constante. Calentamos dicho cuerpo a una temperatura t. Esto se puede lograr con un baño de agua del cual conocemos su temperatura. Es mejor colocar el cuerpo en un recipiente con vapor de agua hirviendo; por ejemplo el aparato de Regnault (fig. 84). Para manejar

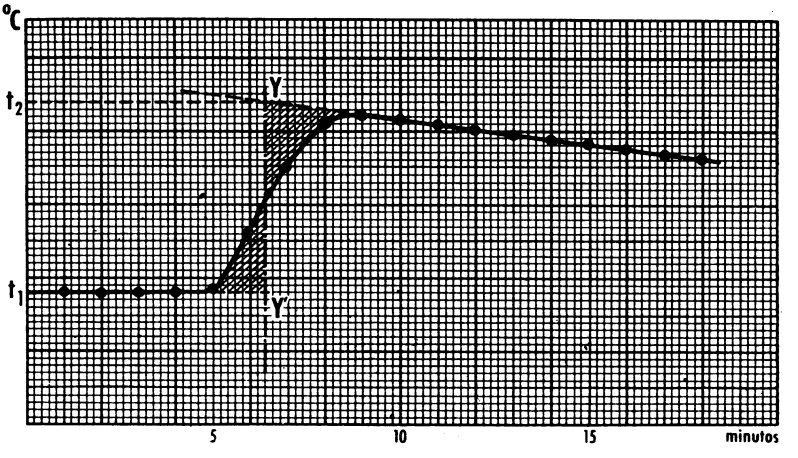


FIG. 91.

el cuerpo podemos suspenderlo de un hilo. El cuerpo se mantiene a la temperatura constante, durante unos 15 minutos, para asegurarnos de que su temperatura coincide con la del vapor. Mientras tanto, pesamos el calorímetro sin y con agua, para hallar la masa M del agua por diferencia. Colocamos el termómetro y el agitador y empezamos a tomar la temperatura, de minuto en minuto, unos cinco minutos antes de introducir el cuerpo. Una vez introducido el cuerpo, continuamos agitando y tomamos la temperatura de minuto en minuto. Representamos gráficamente las temperaturas en función del tiempo. La curva hallada es parecida a la de la figura 91. Operando análogamente que en la práctica anterior hallaremos las temperaturas t_1 y t_2 inicial y final del calorímetro.

Conociendo el valor en agua A del calorímetro (hallado en la práctica anterior), la temperatura inicial del cuerpo y las t_1 y t_2, aplicamos la fórmula del método de las mezclas:

$$mc\,(t - t_2) = (A + M)\,(t_2 - t_1)$$

$$c = \frac{(A + M)\,(t_2 - t_1)}{m\,(t - t_2)}$$

Para conocer la temperatura t (si lo hemos calentado al vapor del agua hirviendo), debemos saber la presión atmosférica en el lugar de la práctica y con unas tablas de presión de vapor hallar la temperatura de ebullición del agua.

Determinación del calor de vaporización del agua. — Mediremos el aumento de temperatura del calorímetro, debido a la condensación de un cierto número de gramos de vapor de agua, y de aquí hallamos el calor de condensación, que es igual al de vaporización.

Utilizamos el dispositivo representado en la figura 92. Se desconecta el tubo de goma G y se hace hervir el agua contenida en el matraz. Mientras tanto se

pesa el calorímetro (por el método de carga constante) antes y después de llenarlo parcialmente de agua destilada. Por diferencia conoceremos la masa M del agua en el calorímetro. Se conecta el tubo G. Se van anotando las temperaturas leídas en el termómetro del calorímetro de medio minuto en medio minuto. El recipiente B recoge el agua que se condensa por el camino y evita que llegue al calorímetro.

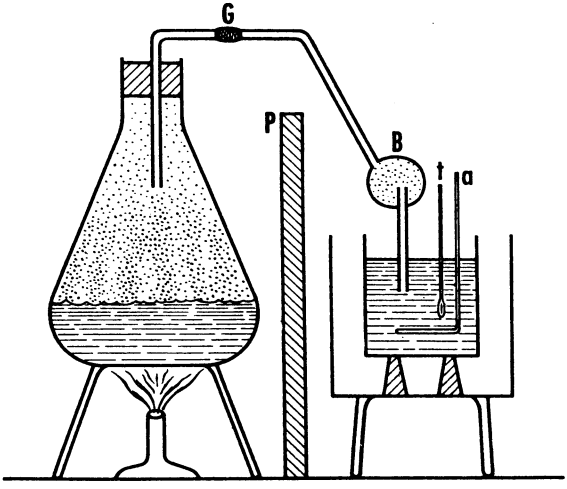


FIG. 92

Cuando el aumento de temperatura es de unos 5°, se retira el matraz del fuego, después de haber desconectado G. Se continúa agitando y leyendo las temperaturas, durante unos diez minutos. Se pesa de nuevo el calorímetro, y por diferencia con el valor hallado antes en la segunda pesada, hallamos la masa m de vapor condensado.

Representamos gráficamente las temperaturas en función del tiempo y procediendo como en la práctica anterior determinamos las temperaturas t_1 y t_2 inicial y final del agua del calorímetro.

Calor cedido por el vapor (siendo L el calor de vaporización)

$$mL + m\,(t - t_2)$$

t es la temperatura del vapor, la cual se determina, conociendo la presión atmosférica, por medio de las tablas de temperatura de ebullición.

Aplicando el método de las mezclas.

$$mL + m\,(t - t_2) = (A + M)\,(t_2 - t_1)$$

de donde

$$L = \frac{(A + M)\,(t_2 - t_1) - m\,(t - t_2)}{m} \text{ cal/g}$$

La pantalla P, evita que el calorímetro reciba calor de foco calorífico con que calentamos el matraz y del propio matraz.

Determinación del calor de fusión del hielo. — Colocamos en el calorímetro cierta cantidad de agua (determinada por diferencia de pesadas como en los casos anteriores). Vamos agitando el agua y anotando la temperatura de medio en medio minuto, durante unos cinco minutos. Tomamos un pedazo de hielo, el cual secamos con papel de filtro, y lo introducimos en el calorímetro. Continuamos agitando y anotando la temperatura cada medio minuto hasta que la temperatura sea sensiblemente estacionaria. Representemos gráficamente la temperatura en función del tiempo y obtendremos una gráfica como la de la figura 93.

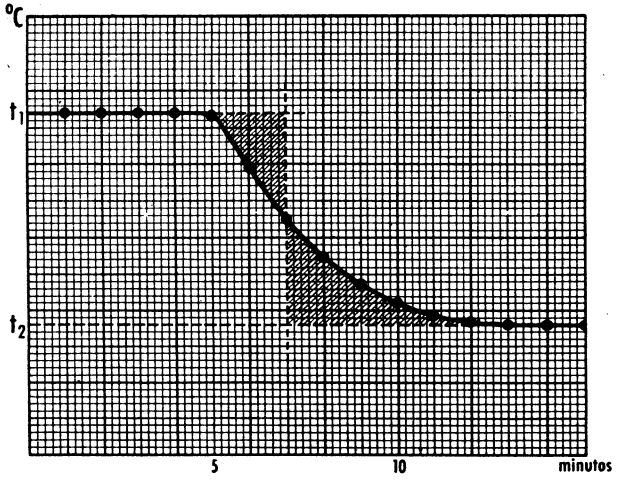


FIG. 93

Procediendo como en las anteriores prácticas determinamos las temperaturas t_1 y t_2 inicial y final.

Pesamos de nuevo el calorímetro y por diferencia entre la masa actual y la anterior determinamos la masa m de hielo introducida.

El calor cedido por el agua del calorímetro que vale $(A + m)(t_1 - t_2)$ sirve para fundir el hielo y calentar el agua, resultado de la fusión desde 0°C hasta t_2. Así pues, escribimos (siendo L el calor de fusión)

$$(A + M)(t_1 - t_2) = mL + mt_2$$

de donde

$$L = \frac{(A + M)(t_1 - t_2)}{m} - t_2 \text{ cal/g}$$

CUESTIONES

1. *Comunicando la misma cantidad de calor a una masa de hierro y a otra igual de aluminio. ¿En cuál es mayor la elevación de temperatura?*

2. *¿La capacidad calorífica de cierto volumen de agua, coincide con dicho volumen?*

3. *¿A qué se llama valor en agua de un calorímetro?*

4. *Construyendo un calorímetro con una sola vasija, ¿qué error cometeremos?*

5. *¿Tiene ventajas el calorímetro de Bunsen sobre el usado en el método de las mezclas?*

6. *¿Por qué hay que agitar el líquido en el método de las mezclas?*

7. *¿Cómo podemos determinar la temperatura de un sólido?*

8. *¿Cómo podemos lograr que un sólido tenga una temperatura dada?*

9. *Para determinar el valor en agua de un calorímetro, tal como se hace en la correspondiente práctica, ¿es indistinto añadir agua fría que caliente?*

10. *¿Por qué se seca el hielo en la práctica de la medida de su calor de fusión?*

11. *En la práctica de la determinación del calor de vaporización, el recipiente* B *evita que caiga agua debida a vapor condensado, al calorímetro. ¿Por qué hay que tomar esta precaución?*

PROBLEMAS

1. A una masa de cobre de un gramo que está a 0°C, le comunicamos 9,2 calorías y su temperatura se eleva a 100°C. A continuación le comunicamos 9,5 calorías y su temperatura pasa a 200°C. Con estos datos, determinar el calor específico medio del cobre entre 0 y 100°C, entre 100 y 200°C, entre 0 y 200°C Representar gráficamente la cantidad de calor comunicada en función de la temperatura. Interpretar gráficamente el valor del calor específico medio.

2. El valor de la temperatura de cierto cuerpo, en función de la cantidad de calor comunicada a un gramo de este cuerpo, viene dada por la ecuación: $Q = 0{,}1 \cdot t + 0{,}000005\ t^2$. Calcular el calor específico del mismo a la temperatura de 100°C. Calcular el calor específico medio entre 50°C y 200°C.

3. Un depósito cilíndrico de 2 m de altura, cuya sección recta tiene 1 m de diámetro, está lleno de agua. ¿Cuál es la capacidad calorífica del agua? Si la masa del depósito es de 20 kg, ¿cuál será la capacidad calorífica total? (Calor específico del material con el cual está construido el depósito, c = 0,12 cal/g.grado.

4. Un recipiente de 80 gramos y calor específico 0,1 cal/g.grado contiene 500 g de agua. ¿Cuál es la cantidad de calor necesaria para que la temperatura se eleve en 60°C? La misma pregunta, cuando en lugar de agua, tenemos la misma cantidad de aceite, cuyo calor específico vale 0,31 cal/g.grado.

5. Un calorímetro cuyo valor en agua es 50 cal/grad contiene 650 g de agua a 24°C. Introducimos un cuerpo de masa 40 g, calor específico 0,09 cal/g.grado y temperatura 100°C. ¿Cuál es la temperatura final del conjunto?

6. En un calorímetro que contiene 200 g de agua a 12°C, introducimos un cuerpo de masa 80 g y calor específico 0,11 cal/g·grado. La temperatura inicial del cuerpo era de 80°C y la final de la mezcla 14,5°C. ¿Cuál es el valor en agua del calorímetro?

7. En un calorímetro de valor en agua 20 cal/grado y que contiene 80 g de agua a 10°C, introducimos 172,4 g de alcohol. Sabiendo que la temperatura inicial del alcohol era 50°C y la final de la mezcla 30°C, determinar el calor específico del alcohol.

8. Un recipiente cerrado cuyo volumen es de 0,3 m^3 contiene aire a 0°C a la presión de 760 tor. Siendo el calor específico del aire a volumen constante $c_v = 0{,}17$, ¿qué cantidad de calor debemos comunicar a dicho aire para que la temperatura se eleve a 25°C? ¿Cuál será la presión final?

CAPÍTULO XII

CAMBIOS DE ESTADO

Vaporización y condensación. — El paso de una sustancia del estado líquido al gaseoso recibe el nombre de *vaporización*. Al fenómeno inverso se le llama *condensación* o *licuación*.

Se llaman líquidos volátiles los que se vaporizan fácilmente a la temperatura ambiente. Por ejemplo, alcohol, éter, cloruro de etilo, etc. Los líquidos a los que ocurre lo contrario son poco volátiles. Por ejemplo, mercurio, ácido sulfúrico, glicerina, aceite, etc.

Todo líquido volátil en el vacío se evapora instantáneamente. El recinto donde existía el vacío, al vaporizarse el líquido se va llenando de vapor del líquido, y por tanto en el momento de iniciarse la vaporización ya no existe el vacío, sino que hay cierta cantidad de vapor. Este vapor causa una presión, que va aumentando a medida que se vaporiza más líquido. A la presión del vapor a veces se le llama *tensión de vapor*. Cuando se ha vaporizado cierta cantidad de líquido cesa la vaporización; entonces se dice que el recinto está saturado y que el vapor es *saturante*. La presión en aquel instante es la máxima. Ha ido aumentando a medida que se vaporizaba líquido, y se mantiene constante en este valor máximo si no varía la temperatura.

Si en el recinto existe otro gas, la vaporización es más lenta, pero la presión máxima, cuando hay saturación, es la misma que cuando el recinto no contenía ningún otro gas. Cuando hay saturación, la presión total en el recinto es igual a la suma de la presión inicial del gas más la máxima del vapor. Esto es consecuencia de la ley de Dalton, que dice: *La presión total de una mezcla de gases o vapores es igual a la suma de las presiones parciales que tendrían cada uno de ellos si ocupasen solos el mismo recinto.*

Cuando la vaporización se produce en la superficie libre del líquido en presencia del aire y a cualquier temperatura, se llama *evaporación*. Cuando la vaporización tiene lugar por elevación de temperatura, hasta un cierto valor en que la vaporización se produce en toda la masa líquida de forma tumultuosa, tiene lugar el fenómeno de la ebullición.

Leyes de la evaporación:

La masa de líquido evaporada en un cierto tiempo es directamente proporcional a la superficie libre del líquido S, a la diferencia que existe entre la presión máxima p_m del vapor a la temperatura de la experiencia, y la presión p de este vapor en la atmósfera, y es inversamente proporcional a la presión atmosférica.

Estas leyes pueden condensarse en la fórmula

$$m = K \frac{p_m - p}{p_a} S$$

(siendo p_a la presión atmosférica).

Se favorece la evaporación renovando la capa de aire próxima a la superficie libre del líquido, por aspiración o por una corriente de aire, pues así evitamos que p aumente. Si p fuese igual a p_m, la masa evaporada sería nula.

Ebullición. Al llenar un recipiente con un líquido, quedan burbujas de aire. Al calentar el líquido, las burbujas aumentan de volumen y se van saturando de vapor del líquido. Al aumentar la temperatura van ascendiendo, y al llegar a la superficie producen el ruido característico de la ebullición. Esto no ocurre hasta que la temperatura de la masa líquida tiene cierto valor; si es menor, las capas altas, por tener temperatura inferior a las bajas, provocan nueva condensación del vapor y las burbujas se aplastan. La temperatura se va homogeneizando por convección, y cuando la temperatura es tal que la presión con que llega el vapor a la superficie es igual a la presión exterior, el líquido hierve. Mientras dura la ebullición, la temperatura permanece constante. Si la presión exterior es igual a una atmósfera, la temperatura de ebullición recibe el nombre de *punto de ebullición.*

El punto de ebullición es constante para cada líquido, por esto se toma como punto fijo para calibrar un termómetro. Damos a continuación una tabla con los puntos de ebullición de algunos líquidos.

LÍQUIDO	Temperatura en °C
Anhídrido sulfuroso	—10
Cloruro de etilo	12,5
Sulfuro de carbono	46,3
Tetracloruro de carbono	76,8
Alcohol etílico	78,26
Agua	100
Glicerina	290
Mercurio	356,9

La temperatura de ebullición aumenta si el líquido contiene una sustancia disuelta. El aumento de la temperatura de ebullición es directamente proporcional al número de moles de la sustancia disuelta.

Si la presión exterior aumenta, la temperatura de ebullición aumenta; si disminuye, la temperatura de ebullición también disminuye. A continuación damos una tabla de las temperaturas de ebullición del agúa a distintas presiones:

p en tor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	97,71	97,75	97,79	97,83	97,87	97,91	97,95	97,99	98,03	98,07
710	98,10	98,14	98,18	98,22	98,26	98,30	98,34	98,38	98,41	98,45
720	98,49	98,53	98,57	98,61	98,64	98,68	98,72	98,76	98,80	98,84
730	98,87	98,91	98,95	98,99	99,03	99,06	99,10	99,14	99,18	99,21
740	99,25	99,29	99,33	99,37	99,40	99,44	99,48	99,52	99,55	99,59
750	99,63	99,66	99,70	99,74	99,73	99,87	99,85	99,89	99,92	99,96
760	100,00	100,03	100,07	100,11	100,14	100,18	100,22	100,25	100,29	100,33
770	100,36	100,40	100,44	100,47	100,51	100,55	100,58	100,62	100,65	100,69

Ejemplo: Para hallar la temperatura de ebullición a 723 tor, buscamos la intersección de la fila correspondiente a 720 y la columna correspondiente a 3. La temperatura hallada es 98,61°C.

Propiedades de los vapores saturados y no saturados. — Cuando el vapor contenido en un recinto tiene una presión inferior a la máxima alcanzada cuando hay saturación, se dice que es un vapor no saturado. Los vapores no saturados se comportan aproximadamente como gases, y por tanto cumplen sus leyes. Estas leyes las cumplen tanto mejor cuanto más lejos esté el vapor de la saturación. Si queremos determinar la masa de un tal vapor dél cual conocemos su presión parcial en una mezcla de gases, en un recinto de volumen V, aplicaremos la fórmula

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

De aquí vemos que permaneciendo constante la temperatura, la presión es proporcional a la masa del vapor.

Si en un recinto cerrado tenemos cierta cantidad de líquido, al vaporizarse va aumentando la presión del vapor. Si el líquido se ha vaporizado completamente y la presión es inferior a la máxima, el vapor en el recinto es no saturado. Si añadimos líquido, cuando la presión es igual a la máxima, ya no se vaporiza más, y el vapor es saturado. Si aumentamos la temperatura observamos que se vaporiza más líquido, aumentando la presión máxima, hasta que se satura de nuevo. Caso de que el líquido se hubiese vaporizado completamente, al aumentar la temperatura dicho vapor sería no saturado. Se comprueba experimentalmente que la presión máxima del vapor saturante es independiente del volumen que ocupa y de las masas del líquido y vapor. Si en el recinto dondè tenemos el vapor saturante pretendemos aumentar la presión disminuyendo el volumen,

manteniendo constante la temperatura, lo único que conseguimos es condensar vapor, permaneciendo constante la presión máxima. De aquí se deduce que estos vapores saturantes no cumplen la ley de Boyle.

Puede darse el caso de que el vapor esté sometido a una presión superior a la máxima sin que condense. En este caso el vapor está *sobresaturado.*

Este fenómeno suele ocurrir al vapor de agua en la atmósfera cuando no existen *núcleos de condensación.* Estos núcleos de condensación con pequeñas partículas de polvo, humo, iones, etc., sobre las cuales se condensa el vapor.

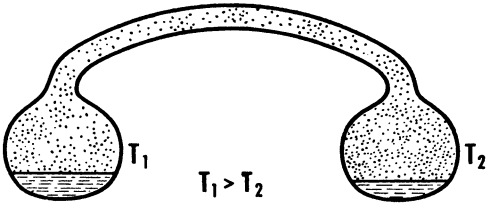


FIG. 94

Si el recinto ocupado por el vapor saturante (fig. 94) tiene una zona a temperatura T_2 inferior al resto, en esta zona se condensará líquido, pues la presión máxima es inferior a la del vapor saturado en el recinto. Al condensarse vapor, la presión del vapor saturante en el recinto disminuye, y por tanto se vaporiza líquido de la parte a mayor temperatura T_1, hasta que la presión sea la máxima a aquella temperatura. En la zona a menos temperatura se condensa líquido de nuevo, y así sucesivamente. Esto hace que el líquido que estaba en la zona a mayor temperatura va pasando a la zona de menor temperatura; es decir, tiene lugar una *destilación.*[1] Esto se utiliza para separar dos líquidos de distinto punto de ebullición (distintas presiones máximas). El líquido más volátil, que es el que tiene mayor presión máxima, es el que destila primero.

Para condensar un vapor se puede hacer por compresión o por enfriamiento. Al comprimir un vapor va aumentando su presión hasta que se convierte en saturante Si continuamos comprimiendo, la presión se mantiene constante, igual a la máxima del vapor a la temperatura del experimento (que la mantendremos constante), y el vapor se va condensando.

Si enfriamos un vapor, la presión de saturación disminuye y el vapor pasa a ser saturante. Continuando el enfriamiento, el vapor se va condensando. En algunos casos, al enfriar el vapor se presenta la sobresaturación (citada anteriormente).

Por uno de los dos procedimientos citados podemos condensar vapores. Podemos comprimir y enfriar a la vez para que la condensación sea más rápida.

1. El fenómeno descrito recibe el nombre de *principio de Watt o de la pared fría.*

Higrometría. — Como resultado de la parcial evaporación del agua existente en la superficie terrestre, la atmósfera contiene cierta cantidad de vapor de agua. La masa de vapor contenida en un volumen determinado de aire es variable de un lugar a otro, en las capas bajas de la atmósfera. En las capas altas va disminuyendo, debido a la condensación por enfriamiento.

El vapor se condensa sobre *núcleos de condensación* para formar las nubes.

Se llama *humedad absoluta* a la masa de vapor contenida en un volumen de aire determinado. Se acostumbra a medir en gramos/m^3.

Si el vapor no es saturante (como ocurre la mayoría de las veces), podemos aplicar la ley de los gases:

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

la M del vapor del agua es 18.

$$\frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{p}{T} \frac{18}{8{,}3 \cdot 10^7}$$

Si medimos V en m^3

$$\frac{m}{10^6 \cdot V} = \frac{p}{T} \frac{18}{8{,}3 \cdot 10^7}; \qquad \frac{m}{V} = \frac{p}{T} \frac{18}{83}$$

Midiendo p en tor

$$\frac{m}{V} = \frac{1333p}{T} \frac{18}{83}$$

Considerando la temperatura ambiente $t = 18°C$

$$T = 18 + 273 = 291$$

$$\frac{m}{V} = \frac{1333 \cdot 18}{291 \cdot 83} p = p$$

A la temperatura ambiente la humedad absoluta en g/m^3 es igual aproximadamente a la presión de vapor expresada en tor.

Se llama *humedad relativa* o *estado higrométrico,* a la relación entre la masa de vapor en un volumen dado de aire (humedad absoluta) y la masa de vapor contenida en el mismo volumen si estuviese saturado a la misma temperatura.

De lo dicho anteriormente se desprende que la relación entre las masas, es la misma que entre la presión del vapor y la de saturación a la misma temperatura. Generalmente, la atmósfera no está saturada, por tanto la humedad relativa es inferior a la unidad. Si hubiese saturación la humedad relativa sería la unidad. Se acostumbra a dar esta humedad relativa en tantos por cien. Para tenerlo en tantos por cien multiplicaremos la anterior relación por cien. Por ejemplo, si la presión del vapor existente

en la atmósfera es de 10 tor a 20°C, siendo la presión de saturación a 20°C igual a 17,54 tor, la humedad relativa vale:

$$e = \frac{10}{17{,}54} = 0{,}57 \quad \text{es decir, el 57 \%}$$

A continuación damos una tabla con las presiones de saturación del vapor de agua a distintas temperaturas, y la masa de vapor contenida en 1 m³ de aire para cada presión de vapor:

t°C	p (tor)	m (g/m³)	t°C	p (tor)	m (g/m³)
0	4,58	4,84	20	17,54	17,3
2	5,29	5,6	22	19,83	19,4
4	6,10	6,4	24	22,38	21,8
6	7,01	7,3	26	25,2	24,4
8	8,05	8,2	28	28,36	27,2
10	9,21	9,4	30	31,83	30,3
12	10,52	10,7	32	35,67	33,8
14	11,99	12,1	34	39,91	37,5
16	13,64	13,6	36	44,58	41,7
18	15,48	15,4	38	49,71	46,2
			40	55,3	51,0

Observemos que de 16°C a 18°C, p coincide con m; si $t < 10$°C, $p < m$; si $t > 18$°C, $p > m$.

A continuación vamos a resolver un problema usando la tabla anterior. La humedad relativa de una masa de aire encerrada en un recipiente de 1 m³, es de 40 % a 20°C. ¿Cuál será su humedad relativa a 16°C? ¿A qué temperatura la humedad será del 100 % (punto de rocío)? ¿Qué cantidad de agua se habrá condensado, si la temperatura desciende a 20°C?

A 20°C: $p_s = 17{,}54$ tor; $p \doteq 0{,}4 \cdot 17{,}54 = 7{,}016$, que corresponde a 7,3 g/m³.

A 16°C: $p_s = 13{,}64$ tor, que corresponde a 13,6 g/m³;

la humedad relativa será: $\frac{7{,}3}{13{,}6} = 0{,}536$, o sea, 53,6 %.

A 6°C vemos que: $p_s = 7{,}01$ tor; luego a temperatura igual o menor que 6°C, la humedad será de 100 %. El punto de rocío es 6°C.

A 2°C: $p_s = 5{,}29$, que corresponde a 5,6 g/m³.

La masa de agua condensada es $7{,}3 - 5{,}6 = 1{,}7$ gramos.

Si no disponemos de las tablas de masa de vapor en 1 m³, en función de la presión, podíamos haber considerado las presiones en lugar de masas. El error cometido es pequeño ($7{,}016 - 5{,}29 = 1{,}726$ gramos).

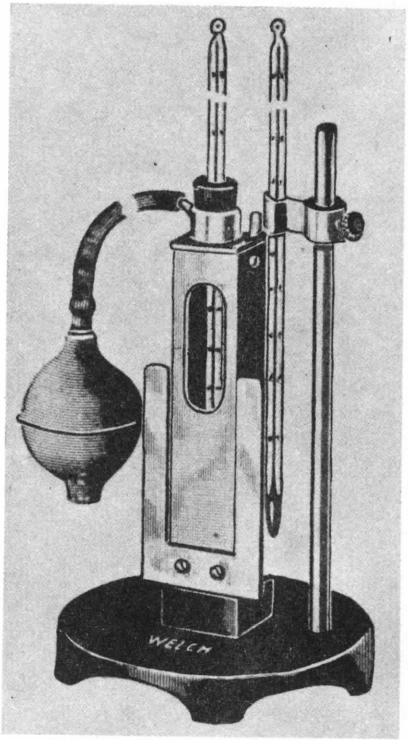
Cuando el aire se enfría el vapor de agua que contiene llega a saturarlo y continuando el enfriamiento se condensa parte del vapor en forma de pequeñas gotas. Esto explica el fenómeno del *rocío*. Si la temperatura en

el suelo o en objetos sobre él es inferior a cero grados, el vapor condensado se hiela. Ésta es la explicación de la *escarcha*.

Se llama *punto de rocío* a la temperatura para la cual el vapor de agua existente en la atmósfera es saturante.

Conocido el punto de rocío podemos determinar la humedad relativa, que será el cociente entre la presión saturante a la temperatura correspondiente al punto de rocío y la presión saturante a la temperatura ambiente.

En esto se basan los *higrómetros* de Daniell, Regnault y Alluard. El fundamento de estos higrómetros consiste en enfriar por la rápida evaporación de un líquido muy volátil (por ejemplo, éter), un recipiente metá-



Higrometro de Alluard

lico, el cual se empaña al llegar al punto de rocío, debido a la condensación del vapor de agua contenido en el aire ambiente. Con un termómetro sumergido en el líquido que se vaporiza, determinamos el punto de rocío. Con unas tablas (puede servir la tabla anterior) se determinan las presiones máximas correspondientes al punto de rocío a la temperatura am-

biente. El cociente entre la primera presión máxima y la segunda nos da la humedad relativa. En las Prácticas se describirán otros métodos.

Fusión y solidificación. — Se llama *fusión* al paso de un cuerpo del estado sólido al estado líquido. El paso del estado líquido al sólido se llama *solidificación*. Estos dos fenómenos inversos se efectúan a la misma temperatura. En los cuerpos cristalizados el paso de sólido a líquido ocurre a cierta temperatura y de manera brusca. En los cuerpos amorfos, la fusión es precedida de un estado de fluidez creciente con la temperatura. Esto es lo que ocurre con la cera o el lacre que al calentarlos se reblandecen, adquiriendo un aspecto pastoso que se va fluidificando hasta que lentamente pasan al estado líquido.

Para los cuerpos cristalizados rigen las siguientes leyes: *A presión constante los cuerpos funden a una temperatura fija llamada temperatura de fusión.*

Mientras dura la fusión la temperatura permanece constante.

Si la presión es igual a una atmósfera, la temperatura de fusión recibe el nombre de *punto de fusión*. Es constante para cada cuerpo cristalizado y por esto se toma como punto fijo para el calibrado de termómetros. A continuación damos una tabla con los puntos de fusión de algunos cuerpos:

CUERPO	Punto de fusión 0°C
Mercurio	—38,87
Tetracloruro de carbono	—22,9
Agua	0,00
Benceno	5,48
Naftalina	79
Sodio	98
Estaño	232
Plomo	327
Cinc	418
Plata	900
Oro	1068
Platino	1750

Algunas veces el cuerpo permanece en estado líquido a temperatura inferior al punto de solidificación, y se dice entonces que está en subfusión. Una pequeña sacudida basta para que el cuerpo solidifique y la temperatura se eleva al punto de solidificación.

Cuando el líquido contiene una sustancia disuelta, la temperatura de solidificación disminuye.

La disminución de la temperatura de solidificación es directamente proporcional al número de moles de la sustancia disuelta por unidad de volumen de disolución.

A este descenso de temperatura se le llama descenso *crioscópico*.

Los sólidos aumentan de volumen al fundirse. Se exceptúa el hielo que al fundirse disminuye su volumen. Densidad del hielo a 0°C es 0,91 g/cm^3, y la del agua a 0°C 0,9998 g/cm^3.

Al aumentar la presión, la temperatura de fusión aumenta para los cuerpos que aumentan su volumen al fundirse, y disminuye, en caso contrario. Consideremos el hielo: al aumentar la presión funde a temperatura inferior a 0°C. Si cesa la presión, el agua vuelve a helarse *(rehielo)*. Tensamos un alambre y cortamos un bloque de hielo. Al llegar a la parte baja del bloque se ha soldado por rehielo la parte superior.[1]

Sublimación. — Es el tránsito del estado sólido a vapor sin pasar por el estado líquido.

Algunos sólidos, a la temperatura normal y a la temperatura ambiente, emiten vapores en cantidades apreciables. Elevando la temperatura, podemos lograr que pasen del estado sólido a vapor sin fundirse.

Como ejemplo de sólidos que presentan el fenómeno de la sublimación tenemos: la naftalina, el alcanfor, el yodo, el arsénico. Puede observarse este fenómeno en el hielo a baja presión.

La sublimación depende de la presión. Se favorece la sublimación disminuyendo la presión (véase el apartado Punto triple).

Calores de cambio de estado. — Hemos visto que los cambios de estado tenían lugar a cierta temperatura a la presión de una atmósfera. Mientras dura el cambio de estado la temperatura permanece constante.

Si a un sólido le vamos suministrando calor va aumentando su temperatura. Cuando llegamos al punto de fusión, aunque continuemos suministrando calor, la temperatura no varía mientras dura la fusión. Todo el calor absorbido por el cuerpo ha sido utilizado en el cambio de estado sólido a líquido. Si continuamos calentando el líquido, su temperatura aumenta hasta que llega al punto de ebullición, durante la cual su temperatura permanece constante. El calor absorbido durante la ebullición se emplea en el paso del estado líquido a vapor. Durante la fusión y la ebullición se absorbe cierta cantidad de calor para lograr el cambio de estado.

Definirimos el *calor de fusión* como la cantidad de calor por unidad de masa, que ha de ser suministrada a un sólido en su punto de fusión, para que pase al estado líquido, a la misma temperatura.

Cuando a un líquido lo enfriamos, al llegar al punto de solidificación la temperatura permanece constante. La cantidad de calor sustraída por enfriamiento es igual a la cedida por el líquido al solidificarse. El calor de solidificación coincide con el de fusión, pero el de fusión es calor absorbido por el cuerpo, y el de solidificación es cedido por el mismo.

El calor de fusión o el de solidificación se acostumbra a medir en calorías/gramo. Por ejemplo: el del agua es 80 cal/gramo.

Definiremos el calor de vaporización de un líquido a cierta tempera-

1. Para pequeñas variaciones de presión (por ejemplo, variaciones en la presión atmosférica) la temperatura de fusión puede considerarse constante.

tura, como la cantidad de calor por unidad de masa que ha de suministrarse a la sustancia para convertirse en vapor saturado, a la temperatura citada, bajo presión constante igual a la presión máxima en aquellas condiciones.

Generalmente, se toma la temperatura correspondiente al punto de ebullición; entonces el valor de vaporización recibe el nombre de *calor de vaporización normal.* El calor de vaporización normal del agua es 539 cal/gramo.

El calor de condensación coincide con el de vaporización, pero en lugar de ser absorbido es cedido.

En las Prácticas del capítulo anterior se describen métodos de medida del calor de fusión y del calor de vaporización.

Cuando un sólido se sublima, el calor de sublimación es igual a la cantidad de calor por unidad de masa necesaria para pasar de sólido a vapor a cierta presión y temperatura. Su valor es igual a la suma del calor de fusión más el de vaporización de la sustancia sublimada.

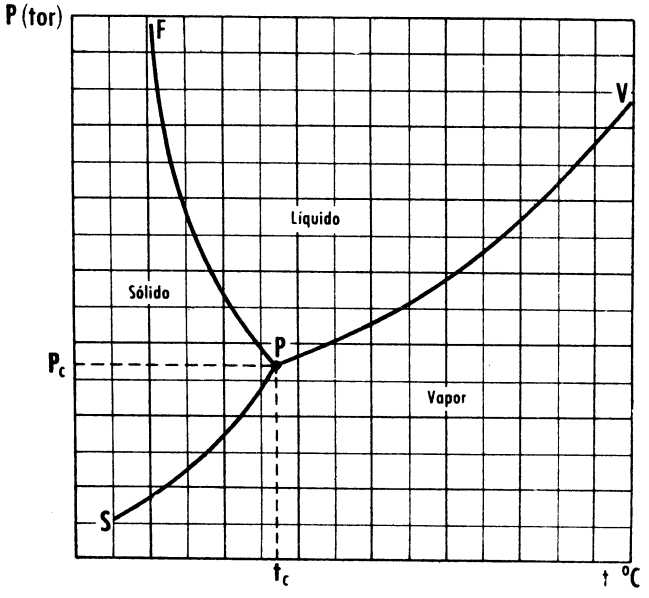


FIG. 95

Punto triple. — Antes hemos dicho que las temperaturas de fusión, vaporización y sublimación dependen de la presión. Vamos a representar dichas temperaturas en función de la presión (fig. 95). La curva de la temperatura de fusión en función de la presión (ordenadas presión y en abscisas temperatura) en la figura es la *PF*, la de vaporización es la *PV* y la de sublimación la *SP* La curva *PF* es la curva de equilibrio sólido-

líquido, la PV la de equilibrio líquido-vapor y la SP la de equilibrio sólido-vapor El punto P, intersección de estas tres curvas, es el llamado *punto triple*. En dicho punto pueden coexistir las tres fases: sólido-líquido-vapor.

Por encima del punto triple, por aumento de temperatura pasamos de sólido a líquido y de líquido a vapor. Por debajo del punto triple, por aumento de la temperatura pasamos de sólido a vapor.

Para el agua, las coordenadas del punto triple son $p = 4{,}6$ tor, $t = 0{,}01\,^{\circ}\mathrm{C}$. Si tenemos hielo a una presión superior a 4,6 tor, al aumentar la temperatura pasaremos a agua y del agua a vapor. A una presión inferior a 4,6 tor, al aumentar la temperatura pasaremos directamente de hielo a vapor.

Licuación de gases. — Experimentalmente se comprueba que comprimiendo un gas cuya temperatura es inferior a cierto valor, el gas se licua, es decir, pasa al estado líquido. Representemos gráficamente las isotermas (temperatura constante) de un gas real en función de la presión y el volumen (fig. 96). Tomamos la presión en ordenadas y el volumen en abscisas.

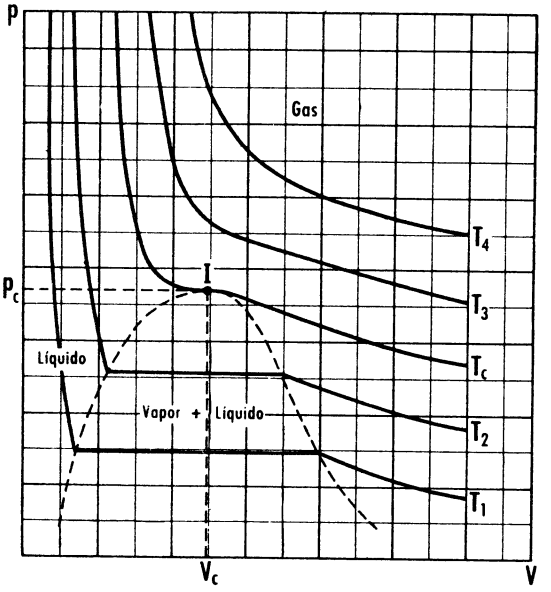


FIG. 96

Colocamos una masa de gas en un recinto donde podamos medir el volumen, la presión y la temperatura. Disminuyendo el volumen aumenta la presión. Si la temperatura T_4 es elevada, el gas obedece a la ley de Boyle. Supongamos que la temperatura es T_1 (la cual mantendremos constante): al disminuir el volumen, la presión aumenta hasta llegar a un cierto valor, en el cual, aunque disminuimos el volumen, la presión se mantiene cons-

tante. En este momento vemos que en el recinto se forman gotas de líquido debidas a la licuación del gas. El vapor dentro del recinto es saturante, y su presión se mantiene constante e igual a la presión máxima de saturación. Disminuyendo el volumen de nuevo, aumenta la cantidad de líquido hasta que todo el gas se ha licuado. Cuando todo el gas está licuado, para una pequeña disminución de volumen hace falta aumentar considerablemente la presión (debida a la poca compresibilidad de los líquidos); la curva asciende casi verticalmente.

Aumentamos la temperatura hasta que su valor sea T_2. Obtendremos una curva parecida a la anterior. Difiere en que para pasar al estado líquido hace falta mayor presión, y que la disminución de volumen, a presión constante, es menor que en la anterior.

Elevando la temperatura al valor T_c, no hay licuación. Existe un punto de inflexión I de coordenadas V_c, p_c. Para temperaturas superiores a T_c no hay licuación y el gas se comporta como un gas perfecto, tanto mejor cuanto mayor sea T.

A la temperatura T_c se le llama *temperatura crítica,* y a las coordenadas V_c, p_c, *volumen críticos* y *presión crítica,* respectivamente.

Si un gas está a una temperatura superior a la crítica, no puede licuarse por aumento de presión. Para licuar un gas deberemos enfriarlo a una temperatura inferior a la crítica, y lo conseguimos por aumento de presión.

Si la presión del gas es inferior a la presión crítica, podemos licuarlo por enfriamiento.

Andrews propuso llamar *gases* a los cuerpos que se encuentran a una temperatura superior a su temperatura crítica, y *vapores* a los que se encuentran a temperatura inferior a la citada.

La temperatura crítica del CO_2 es de 31°C. Excepto en verano puede considerarse un vapor y se licua por compresión.

Para licuar gases cuyas temperaturas críticas sean muy bajas, debemos enfriarlos considerablemente. Pueden utilizarse gases licuados previamente.

Para la licuación de estos gases puede utilizarse un método que consiste en expansionar bruscamente el gas, con lo cual disminuye su temperatura. Se comprime el gas y se refrigera; al expansionarse, la temperatura ha descendido notablemente.

PRÁCTICAS

Construcción de curvas de fusión y de solidificación. — Si calentamos un sólido, su temperatura se eleva hasta llegar a la temperatura de fusión. Entonces permanece constante, mientras dura la fusión. Cuando el sólido ha fundido completamente, al continuar calentado, su temperatura se eleva de nuevo.

Representando gráficamente en abscisas tiempos y en ordenadas temperaturas, obtenemos una gráfica parecida a la fig. 97, *a* (para un cuerpo puro).

En la misma gráfica (*b*), representamos la solidificación. A partir de la temperatura *t* alcanzada por el líquido, lo enfriamos. La temperatura del líquido va disminuyendo hasta que alcanzada la temperatura de solidificación, ésta per-

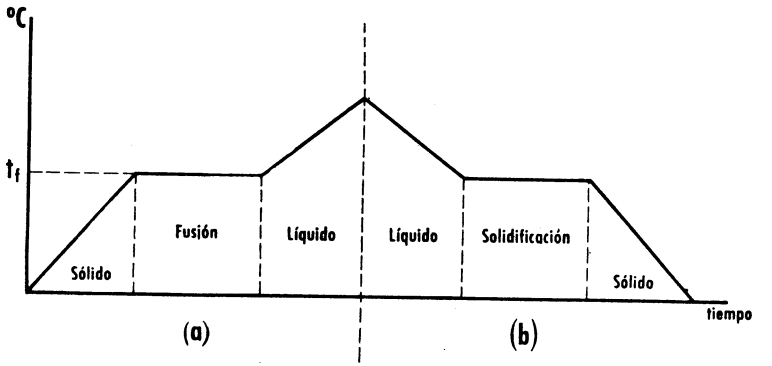


FIG. 97

manece constante mientras el líquido se va solidificando, al cabo de lo cual continúa la disminución de la temperatura. Las dos gráficas (*a*) y (*b*) son simétricas, si las cantidades de calor comunicadas al calentar coinciden con las sustraídas al enfriar.

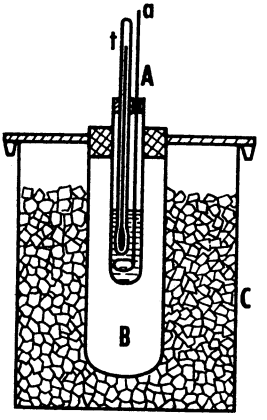


FIG. 98

Para la realización práctica, podemos utilizar el dispositivo de la figura 98. Empezaremos por la curva de solidificación. Introducimos el líquido en el tubo de ensayo *A*, al cual colocamos el termómetro *t* que atraviesa el tapón del tubo, así como un agitador *a* que también atraviesa el tapón y podemos moverlo

verticalmente. La parte inferior del agitador rodea al termómetro, de forma que al agitar, no haya peligro de romperlo.

El tubo *A* está colocado dentro de otro *B* el cual introducimos en una mezcla frigorífica, contenida en el recipiente *C*. La misión de *B* es que quede un espacio de aire entre la mezcla frigorífica y el tubo *A*; así los cambios térmicos son más lentos.

La mezcla frigorífica la constituyen capas de hielo machacado y sal común, alternando el hielo y la sal.

Una vez introducido el líquido, se va agitando constantemente y tomando nota de la temperatura en intervalos regulares de tiempo. En un papel milimetrado, representamos en abscisas tiempo y en ordenadas temperatura. Cuando empieza la solidificación, notaremos que la temperatura permanece constante, hasta que todo el líquido se ha solidificado. A partir de este instante, la temperatura continúa descendiendo. Puede darse el caso de que observemos el fenómeno de la *subfusión*. En este caso la temperatura desciende por debajo de la de solidificación. Al empezar el líquido a solidificarse, la temperatura se eleva hasta que su valor coincide con la temperatura de solidificación t_s. La gráfica que obtenemos en este caso es parecida a la de la figura 99. Si el cuerpo fundido no es puro, al solidificar aparecen irregularidades en la curva de solidificación.

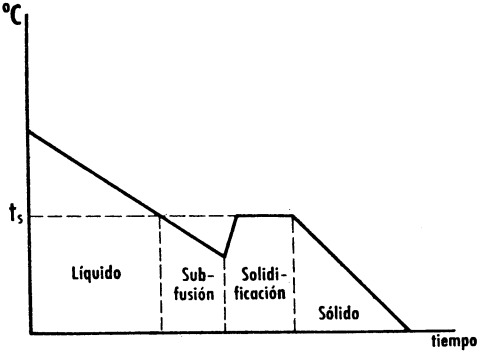


FIG. 99

Para obtener la curva de fusión, quitaremos los tubos *B* y *A* de la mezcla frigorífica y los dejaremos a la temperatura ambiente. Vamos anotando las temperaturas en función del tiempo y obtendremos la curva de fusión que será parecida a la de la figura 97, *a*.

Puede utilizarse como líquido para el trazado de la gráfica, agua destilada o benceno. Sus respectivos puntos de fusión son 0°C y 5, 48°C.

Experiencias sobre vaporización en el vacío. — Disponiendo de un barómetro de cubeta es muy fácil efectuar dichas experiencias.

Por medio de una pipeta, introducimos una pequeña cantidad de un líquido volátil. El líquido asciende por la columna de mercurio y al llegar a la cámara barométrica se encuentra en el vacío y se vaporiza instantáneamente. Esto se comprueba por la desaparición del estado líquido y que la presión del vapor hace

que la columna de mercurio descienda. Introduciendo más líquido, llegará un momento en que el vapor se convierte en saturante y queda una ligera capa de líquido sin vaporizar.

Calentando el tubo desaparece la capa líquida y la columna de mercurio desciende hasta que la presión del vapor, más la debida a la columna de mercurio, coincide con la presión atmosférica en aquel instante.

Experimentando con otros líquidos, en otros barómetros, observaremos que el descenso de la columna de mercurio es distinto. El mayor descenso, a igualdad de temperatura cuando hay saturación, corresponde al más volátil, que es el que tiene mayor presión máxima. Si experimentamos con éter, alcohol y agua, el descenso mayor es el debido al éter, sigue luego el alcohol y, finalmente, el menor es el debido al agua.

Prácticamente puede hacerse con tubos de 1 m de largo cerrados por un extremo. Se llenan de mercurio y se invierten en una cubeta con mercurio. En cada uno de ellos introducimos un líquido volátil distinto; así observaremos los descensos de la columna de mercurio en cada uno de ellos.

Medida de alguna tensión máxima de vapor. — Sean dos tubos barométricos *a* y *b* en la misma cubeta (fig. 100). Introducimos en el tubo *b* un líquido muy volátil, tal como habíamos indicado en la práctica anterior, hasta que el vapor

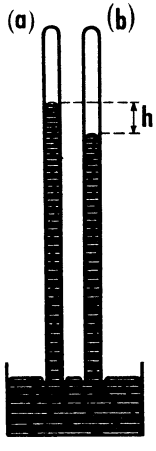


FIG. 100

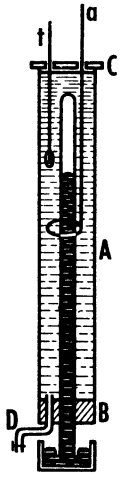


FIG. 101

sea saturante. Para determinar su tensión o presión máxima, mediremos el desnivel *h* del mercurio en los dos tubos.

Este desnivel medido en milímetros nos expresa la tensión máxima en tor a la temperatura ambiente.

Si deseamos medir la tensión máxima a distintas temperaturas, podemos utilizar el dispositivo representado en la figura 101, un tubo barométrico rodeado por otro más ancho *A* abierto por los dos lados. En la parte inferior colocamos

un tapón *B* de corcho, o mejor de goma, con dos orificios. Uno para el tubo barométrico, otro para el desagüe *D*.

Llenamos el tubo *A* con agua a cierta temperatura, introducimos el termómetro *t* y el agitador *a*, tapando el tubo con una tapadera *C*, con dos agujeros para el paso del termómetro y el agitador. Introducimos el líquido en el tubo barométrico en cantidad suficiente para que su vapor sea saturante. Agitamos el agua para homogeneizar la temperatura y leemos la indicación del termómetro.

Medimos la altura de la columna de mercurio emergente de la cubeta, antes y después de introducir el líquido. Reducimos ambas alturas a 0°C, tal como se había indicado en las correcciones barométricas. La diferencia de estas dos alturas reducidas a 0°C y medidas en milímetros será la tensión máxima del vapor expresada en tor, a la temperatura del experimento.

Para operar a otra temperatura, vaciamos parcialmente el tubo por el desagüe *D* y rellenamos hasta el primitivo nivel con agua fría. Agitamos y leemos la temperatura así como la nueva altura de la columna de mercurio. Operando como antes obtenemos la tensión máxima de la nueva temperatura.

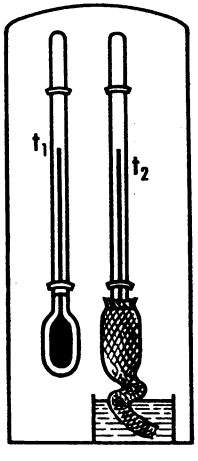


FIG. 102

Vaciamos de nuevo y, operando como en el caso anterior, tendremos la tensión máxima a otra temperatura, y así sucesivamente.

Determinación de la humedad relativa. — Puede medirse la humedad relativa por el método del punto de rocío, descrito al tratar la higrometría.

Vamos a describir un método llamado de *psicrómetro*, que tiene la ventaja de su comodidad y rapidez en la determinación de la humedad relativa.

El psicrómetro consta de dos termómetros, uno al lado de otro (fig. 102). Uno de ellos tiene el depósito recubierto de una tela fina en comunicación con un recipiente con agua. El otro tiene la misión de medir la temperatura ambiente.

La evaporación del agua que impregna la tela enfría el termómetro (llamado húmedo), y su indicación t_2 será inferior a la del otro termómetro t_1 (llamado seco). La diferencia de temperaturas es proporcional a la cantidad de agua evaporada.

Según vimos en el estudio de la evaporación, la cantidad de agua evaporada es directamente proporcional a la diferencia entre la presión máxima del vapor en la atmósfera p_m y la presión del vapor actual p, siendo inversamente proporcional a la presión atmosférica. De aquí podemos escribir que:

$$t_2 - t_1 = k\frac{p_m - p}{p_a} \qquad \text{de donde} \qquad p = p_m - kp_a(t_2 - t_1)$$

El estado higromático, o humedad relativa, vale

$$\frac{p}{p_m} = 1 - k\frac{P_a}{p_m}(t_2 - t_1)$$

p_m la conocemos consultando las tablas de presión máxima del vapor del agua en función de la temperatura, pág. 188 (en este caso la temperatura es la del

ambiente, medida con el termómetro seco). Si hubiese saturación, los dos termómetros indicarían la misma temperatura, luego $t_2 - t_1 = 0$ y la humedad relativa sería 1, es decir, del 100 %.

El valor de k, que es una constante del aparato, se determina midiendo la p por otro método (por ejemplo, por el método del punto de rocío) y despejando k de la fórmula anterior.

Para mayor rapidez en las determinaciones, los psicrómetros llevan una tabla de doble entrada, con la cual, sabiendo la diferencia de la temperatura del termómetro seco y del húmedo, junto con la temperatura ambiente, nos dan directamente la humedad relativa.

Un higrómetro muy conocido es el de cabello. Consta (fig. 103) de un cabello suspendido en O, que pasa por la polea P y es tensado por el pequeño peso m. Las variaciones de humedad hacen variar su longitud. Si aumenta la humedad, se alarga, y si disminuye, se contrae. Los movimientos de la polea, al alargarse o acortarse el cabello, se transmiten a una aguja indicadora A, la cual se mueve frente a una escala E.

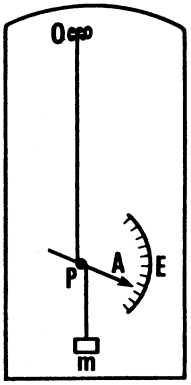


FIG. 103

Este higrómetro se gradúa por comparación con otros. Puede calibrarse de manera sencilla colocándolo en un recipiente cerrado, el cual desecamos con cloruro cálcico u otro desecante. Al cabo de cierto tiempo, la aguja se estaciona en una división de la escala, la cual representará el cero de humedad. A continuación, quitamos el desecante e introducimos una vasija con agua. La aguja indicadora, al cabo de cierto tiempo, se estaciona en otra división, que será el 100 % de humedad.

Entre 0 y el 100 trazamos un cierto número de divisiones iguales, por ejemplo 20, tendremos la humedad relativa de 5 en 5 %. Una vez calibrado, podemos determinar la humedad relativa por lectura directa. Este higrómetro no es muy preciso, pero puede utilizarse para el uso corriente.

CUESTIONES

1. *Cítense ejemplos de métodos usados en la práctica para favorecer la evaporación de un líquido.*

2. *Citen ejemplos en los cuales se ponga de manifiesto las diferencias fundamentales entre la vaporización, evaporación y ebullición.*

3. *En una vasija cerrada tenemos una mezcla de vapores distintos. Razónese un proceso sencillo para separar dichos vapores, si es que es posible.*

4. *¿Qué diferencia existe entre puntos de ebullición y temperatura de ebullición?*

5. *¿Podemos determinar la presión atmosférica midiendo la temperatura de ebullición del agua destilada?*

6. *¿Cómo podemos separar dos líquidos de distinto punto de ebullición?*

7. *¿Por qué se empañan los cristales de las ventanas en invierno y no en verano?*

8. *¿La humedad absoluta varía con la temperatura? ¿Y la humedad relativa?*

9. *Si nos mojamos la mano con un líquido volátil, notamos sensación de frío. ¿Por qué?*

10. *Para enfriar un líquido utilizamos un cubito de hielo. ¿Por qué?*

11. *¿En qué condiciones observaríamos la sublimación del hielo?*

12. *Cítense vapores cuya temperatura crítica sea superior a 0°C.*

PROBLEMAS

1. ¿Cuál debería ser el volumen mínimo de un recipiente cerrado, para que a 16°C se vaporizase completamente un litro de agua contenida en él?

2. Una masa de aire húmedo está saturada a 16°C. Dicha masa está contenida en un recipiente a la presión de 760 tor. ¿Cuál es la presión del aire seco? ¿Cuál es la presión al expansionarse el aire húmedo hasta que el volumen ocupado sea el doble, manteniéndose constante la temperatura?

3. ¿Cuál es la presión del aire húmedo del problema anterior si el volumen se reduce a la mitad?

4. Determinar la masa de 1 m^3 de aire húmedo con los siguientes datos: presión, 750 tor, temperatura, 18°C, humedad relativa, 80 %, densidad del aire seco (a 0°C y 760 tor), 0,001293 g/cm^3.

5. Un recipiente cerrado contiene aire saturado de vapor de alcohol a la presión de 856 tor. Si el volumen se reduce a la mitad, la presión es de 1616 tor. ¿Cuál es la presión de vapor del alcohol y la del aire seco a la temperatura del experimento, la cual se ha mantenido constante?

6. Un calorímetro, cuyo valor en agua es 60 cal/grado, contiene 440 g de agua a 40°C. Introducimos un trozo de hielo a 0°C, de masa 70 g. Calcular la temperatura final de la mezcla.

7. En un calorímetro, cuyo valor en agua es 100 cal/grado, tenemos 900 g de aceite (de calor específico $c = 0{,}3$ cal/g.grado) a 20°C. Introducimos 70 g de estaño a la temperatura correspondiente al punto de fusión (232°C), sabiendo que el calor de fusión del estado es de 14 cal/g y que el calor específico es 0,06 cal/g.grado. Hallar la temperatura final de la mezcla.

8. Tenemos una barra de hielo a 0°C, de masa 4 kg. ¿Cuál es la cantidad de calor necesario para que dicho hielo se transforme en vapor a 100°C y a 1 atm. de presión? (Calor de fusión del hielo 80 cal/g, calor de vaporización normal del agua 539 cal/g.)

9. En el calorímetro del problema 6, en lugar de hielo, introducimos vapor de agua a 100°C. Determinar la masa de vapor condensado, sabiendo que la temperatura del agua ha aumentado en 2,5°C.

10. Queremos producir 2 kg de vapor de agua a 100°C y a 1 atm. de presión, partiendo de agua a 20°C. ¿Cuál es la cantidad de calor necesaria? Sabiendo que 1 g de carbón en su combustión completa cede 6000 cal y que el dispositivo para producir vapor aprovecha el 20 % del calor cedido por la combustión del carbón, ¿cuál será la masa de carbón necesaria para producir el vapor?

CAPÍTULO XIII

EQUIVALENCIAS CALOR-TRABAJO

PRÁCTICAS

Medida del equivalente. — El primero que determinó el equivalente mecánico del calor fue Joule. El procedimiento empleado fue el siguiente:

En el interior de un calorímetro *C* (fig. 104) que contiene una masa *M* de agua, pueden girar unas paletas entre otras fijas en el calorímetro. Estas paletas son solidarias de un eje vertical que tiene un tambor *B* en su parte superior y que puede girar por la acción de dos pesos de masa *m*, atados a un hilo arrollado a dicho tambor.

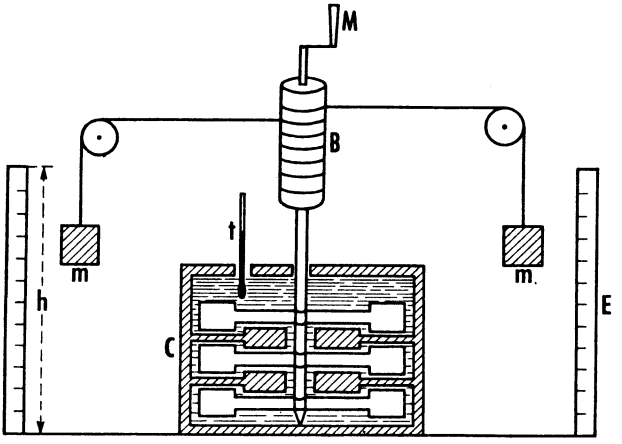


FIG. 104

Dichos pesos caen de una altura *h* que medimos con la regla graduada *E*. El trabajo efectuado por los pesos al caer desde su posición inicial vale 2 *mgh* (despreciando la pequeña energía cinética con que llegan al suelo). Si elevamos los pesos y los dejamos caer *n* veces, el trabajo vale 2 *mghn*. Dicho trabajo se

emplea en agitar el agua del calorímetro, por medio de las paletas, y calienta el agua al transformarse el rozamiento en calor. La cantidad de calor que aparece en el calorímetro vale $Q = (M + A)\Delta t$, siendo A el valor en agua del calorímetro y Δt la elevación de temperatura, la cual determinamos con un termómetro t.

La equivalencia calor-trabajo nos vendrá dada por el cociente entre el trabajo y la cantidad de calor. Llamamos J al equivalente mecánico de la caloría que valdrá

$$J = \frac{2mghn}{(M + A)\,\Delta t}$$

Midiendo el trabajo en julios y el calor en calorías, J vendrá expresado en julios/caloría. La determinación de J por este método da un valor impreciso.

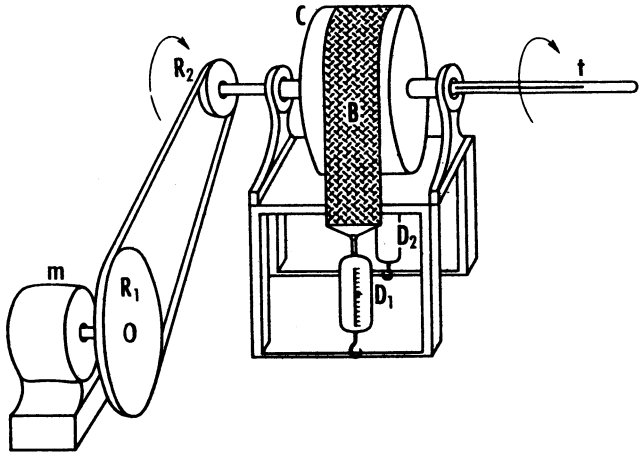


FIG. 105

Podemos utilizar otro método que consiste en lo siguiente: Disponemos de un calorímetro, de valor en agua A conocido, que puede girar alrededor de un eje horizontal (fig. 105). Introducimos un termómetro t en el calorímetro el cual contiene cierta cantidad de agua M. El calorímetro puede girar por la acción de un motor m que transmite su movimiento a la rueda R_2 desde la R_1, cuyos diámetros conocemos. Colocamos sobre el calorímetro, tal como indica la figura, una cinta B de tela gruesa, sujeta a la parte inferior por medio de dos dinamómetros D_1 y D_2. Al girar el calorímetro, la cinta B roza con él y eleva la temperatura del agua interior, lo cual nos viene indicado por el termómetro. Para evitar pérdidas, es conveniente que inicialmente el agua éste 1°C por debajo de la temperatura ambiente y que la elevación de temperatura sea de 1°C o 2°C sobre la ambiente (el termómetro tiene que ser muy sensible).

El trabajo de rozamiento vale el producto de la diferencia de las indicaciones de los dinamómetros $F_1 - F_2$ por $2\pi R$ y por el número de vueltas (R radio de calorímetro), es decir, $\mathfrak{T} = 2\pi Rn\,(F_1 - F_2)$.

La cantidad de calor que ha aumentado en el calorímetro vale:

$$Q = (M + A)\,\Delta t$$

siendo Δt la elevación de temperatura.

Para conocer el número de vueltas, necesitamos un cuentarrevoluciones. Si no disponemos de él, podemos hacer funcionar el motor a un número de revoluciones por segundo tal que podemos contar las vueltas de R_1.[1] Conocidos los diámetros de R_1 y R_2, el número de vueltas por segundo del calorímetro será igual al número de vueltas por segundo del motor por el cociente del diámetro de R_1 y el de R_2. Si el motor gira a velocidad constante, multiplicamos el número de vueltas por segundo de R_2 por el tiempo (que lo medimos con un cronómetro) expresado en segundos y tendremos el número de vueltas n.

Para hallar J dividimos trabajo y cantidad de calor:

$$J = \frac{2\pi R\,(F_1 - F_2)\,n}{(M + A)\,\Delta t}$$

El valor de J, hallado por medidas de precisión, es $J = 4{,}186$ julios/cal. Las medidas a partir de métodos eléctricos son más precisas.

Las relaciones entre las unidades de trabajo y las calorías son:

$$1 \text{ julio} = \frac{1}{4{,}186} \text{ calorías} \simeq 0{,}24 \text{ calorías}$$

$$1 \text{ kgm} = \frac{1}{427{,}1} \text{ kilocalorías}$$

$$1 \text{ ergio} = \frac{10^{-7}}{4{,}186} \text{ calorías} = 0{,}24 \cdot 10^{-7} \text{ calorías}$$

$$1 \text{ kWh} = 3{,}6 \cdot 10^{6} \text{ julios} = 860 \text{ kilocalorías}$$

PROBLEMAS

1. Suponiendo que todo el trabajo se convierte en calor, determinar la cantidad de calor producida al llegar al suelo un cuerpo de masa 50 kg que cae de una altura de 80 m.

2. Un proyectil de masa 8,32 g choca con un bloque de hielo y funde 1 g de dicho hielo. Suponiendo que toda la energía del proyectil se ha usado en fundir el hielo, hallar la velocidad del proyectil.

3. Un cuerpo de 300 kg se desliza por un plano inclinado 30°. Sabiendo que su movimiento es uniforme, determinar la cantidad de calor producida por rozamiento, en un recorrido de 20 m.

4. Un cuerpo cuyo valor específico es 0,1 cal/g·grado cae en el aire a velocidad constante. Determinar el aumento de temperatura en 100 m de recorrido, suponiendo que todo el calor producido por rozamiento con el aire se ha usado en elevar la temperatura del cuerpo.

---

1. (Podemos lograr disminuir la velocidad de rotación tensando la cinta B.)

5. En una central térmica, se usa carbón de poder calorífico 6000 cal/g. Suponiendo que se aprovechan el 20 % de las calorías cedidas por el carbón en la producción de energía eléctrica, determinar el precio del kilovatio-hora. El carbón se paga a 1000 pesetas la tonelada.

TERCERA PARTE

ELECTRICIDAD

CAPÍTULO XIV

CARGA, CAMPO Y POTENCIAL ELÉCTRICOS

Admitimos que la materia es el resultado de la agrupación de partículas elementales: electrones, protones, neutrones, etc. Para explicar el comportamiento de algunas de ellas, supondremos que son partículas *cargadas* eléctricamente. Estas cargas eléctricas no deben suponerse como algo añadido a la partícula; más bien debe considerarse que son parte fundamental de su constitución.

Dos electrones se repelen entre sí, y ocurre lo mismo con dos protones; pero un electrón y un protón se atraen. Diremos que las cargas del electrón y del protón son de signos contrarios. La carga del electrón se dice que es *negativa,* y la del protón, *positiva.*

En general, los cuerpos materiales son *neutros:* contienen tantas cargas positivas como negativas. Si un cuerpo pierde electrones o adquiere cargas positivas, queda cargado positivamente; si adquiere electrones o pierde cargas positivas, queda cargado negativamente. Generalmente los cuerpos ganan o pierden electrones, y de este hecho deducimos su carga.

Frotando una varilla de ebonita o de resina con una piel de gato, la varilla queda cargada negativamente, y la piel positivamente. Esto se explica porque, debido a su estructura, los pelos de los animales, al ser frotados, pierden electrones. Estos electrones son los que cargan negativamente la varilla, quedando la piel cargada positivamente por dicha pérdida. El hielo a bajas temperaturas puede perder electrones y fijar protones. Las nubes altas contienen cargas positivas, probablemente fijadas sobre moléculas de hielo.

Ley de Coulomb. — Experimentalmente se comprueba que los cuerpos cargados se atraen o repelen según que sus cargas sean de signos contrarios o del mismo signo. En 1785, Coulomb realizó sus medidas acerca de las fuerzas ejercidas entre dos cuerpos cargados. Operando con cuerpos cargados, suficientemente pequeños para que pudieran despreciarse sus dimensiones frente a su distancia *(cargas puntuales),* llegó a la conclusión que la fuerza ejercida era inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Colocando los cuerpos a distancia constante, halló que la fuerza

era proporcional a las cargas. Estas conclusiones quedan resumidas en la fórmula

$$F = K\frac{q \cdot q'}{r^2}$$

La constante K depende de las unidades elegidas para la medida de F, r, q, q' y depende también del medio en donde se encuentran las cargas. En el vacío (y prácticamente también en el aire), K sólo depende de las unidades elegidas para la medida de las citadas magnitudes.

La carga eléctrica es una magnitud que no es derivada de las tres tomadas como fundamentales en Mecánica ($M\,L\,T$), la tomaremos como magnitud fundamental y la representaremos por Q.

Utilizaremos el sistema Giorgi racionalizado, en el cual tomaremos la constante K en el vacío igual a $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. El 4π en el denominador es una conveniencia para que resulten más simples algunas fórmulas posteriores.

La ley de Coulomb en el vacío se describe, pues, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q'}{r^2}$; a la ε_0 se le llama constante dieléctrica del vacío. Las dimensiones de ε_0 son

$$[\varepsilon_0] = \frac{Q^2}{[F]L^2} = \frac{Q^2}{MLT^{-2}L^2} = M^{-1}\,L^{-3}\,T^2\,Q^2$$

En el sistema de unidades electrostáticas CGS (llamadas ues), se toma $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, o sea $K = 1$, y definimos la unidad de carga como la que situada en el vacío a un centímetro de otra igual a ella la repele con la fuerza de una dina.

La unidad de carga en el sistema Giorgi es el *coulomb* o *culombio*, que lo representamos por el símbolo C. El sistema Giorgi tomado el culombio como cuarta unidad fundamental será el MKSC.

El valor de un culombio es $3 \cdot 10^9$ ues. Vamos a deducir el valor de ε_0 en el sistema MKSC, para lo cual aplicaremos la ley de Coulomb a la definición de la unidad ues midiendo en unidades MKSC:

1 dina $= 10^{-5}$ newton

1 cm $= 10^{-2}$ m

1 ues de carga $= \frac{1}{3 \cdot 10^9}\,C$

$$10^{-5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{1}{3\cdot 10^9}\cdot\frac{1}{3\cdot 10^9}}{(10^{-2})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{9\cdot 10^{14}}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{9\cdot 10^9} = \frac{1}{36\pi}\,10^{-9}$$

Podemos escribir la ley de Coulomb para cargas situadas en el vacío:

$$F = 9 \cdot 10^9\,\frac{q \cdot q'}{r^2}$$

midiendo r en metros, F en newton y las q en culombios.

La fórmula que expresa la ley de Coulomb nos da el valor del módulo de la fuerza. La dirección del vector fuerza es la de la recta que une las dos cargas, y el sentido depende del signo de las cargas. Si son cargas del mismo signo, el sentido es repulsivo, y es atractivo si son de signo contrario. Según el principio de acción y reacción, la fuerza que q ejerce sobre q' es opuesta a la que q' ejerce sobre q (fig. 1).

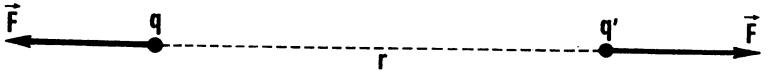


FIG. 1

La carga eléctrica menor que haya podido ser hallada es la del electrón, que vale $e = 1{,}6018 \cdot 10^{-19}$ culombios. El electrón clásico o *negatón* es el que tiene carga negativa, y a él nos referimos al hablar de electrón, pero existe un electrón con la misma carga positiva que se llama *positón*.

Las cargas eléctricas cedidas o adquiridas por un cuerpo son múltiplos de la carga del electrón. Por esto se dice que la electricidad tiene estructura discontinua. En los fenómenos macroscópicos puede considerarse que las variaciones de carga son continuas, dada la pequeñez de la carga del electrón. Sin embargo, dicha discontinuidad se observa en algunos fenómenos electrónicos.

Al principio hemos dicho que la ley de Coulomb se aplica cuando las dimensiones de los cuerpos cargados son despreciables frente a la distancia. Pues bien, la ley de Coulomb no es aplicable cuando las distancias son del orden de 10^{-12} cm. Para estas distancias las partículas no se pueden considerar puntuales.

Campo eléctrico. — Se llama campo eléctrico a toda región del espacio donde se manifiesten acciones de tipo eléctrico. Una carga colocada en un punto de dicho campo está sometida a una fuerza.

Se llama *intensidad del campo eléctrico* en un punto a la fuerza ejercida sobre la unidad de carga eléctrica positiva colocada en dicho punto. La intensidad del campo es una magnitud vectorial. Para determinarla debemos conocer módulo, dirección y sentido.

Colocando una carga q en un punto de un campo eléctrico, estará sometida a una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. Si la carga es positiva, la fuerza tiene el mismo sentido que la intensidad del campo en dicho punto, y si es negativa sentido contrario.

Como $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$, mediremos la intensidad del campo en newton/culombio. Las dimensiones de E son

$$[E] = \frac{[F]}{Q} = \frac{MLT^{-2}}{Q} = MLT^{-2}Q^{-1}$$

Cálculo de la intensidad del campo en algunos casos sencillos. — Supongamos una carga puntual positiva q. Situando otra carga q' en un punto próximo a ella, es atraída o repelida según que sea negativa o positiva. La carga puntual q ha creado un campo a su alrededor. Para hallar la intensidad del campo creado por ella en un punto, en la fórmula de la ley de Coulomb haremos $q' = +1$; así pues, según la definición de intensidad del campo eléctrico, $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$, la dirección es la de la recta que une los dos puntos donde están situadas las cargas, y el sentido repulsivo. (Véase fig. 2.)

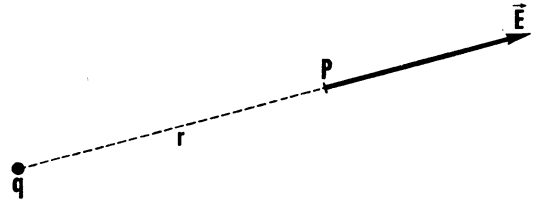


FIG. 2

La intensidad del campo en un punto creado por varias cargas puntuales es igual a la suma vectorial de las intensidades de los campos creados por cada carga puntual en dicho punto. Esto es consecuencia de la composición vectorial de las fuerzas.

Vamos a determinar la intensidad del campo eléctrico creado por dos cargas puntuales en un punto situado sobre la recta que une los puntos donde se hallan las cargas.

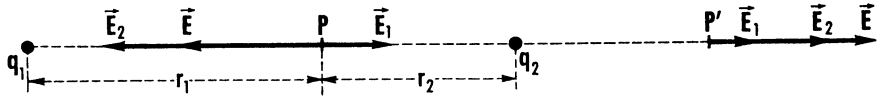


FIG. 3

Supongamos (fig. 3) que deseamos hallar el campo en el punto P situado entre las cargas q_1 y q_2 que dista r_1 y r_2 de q_1 y q_2 respectivamente.

El campo en P creado por q_1 es $\vec{E}_1$, cuyo módulo vale $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}$; la dirección es la de la recta que une q_1 con q_2, y el sentido el indicado en la figura.

La intensidad del campo en el mismo punto P creado por q_2 es E_2, cuyo módulo vale $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}$, de la misma dirección que el $\vec{E}_1$, pero de sen-

tido contrario. La suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ vale $\vec{E}$, cuyo módulo vale $E_2 - E_1$ (ya que son vectores de la misma dirección y sentidos contrarios). Luego la intensidad del campo resultante $\vec{E}$ tiene por módulo

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{r_2^{\,2}} - \frac{q_1}{r_1^{\,2}}\right)$$

tiene la misma dirección que los $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$. El sentido depende de los módulos E_1 y E_2, tendrá el sentido del mayor (en la figura se ha supuesto $E_2 > E_1$). Si fuese $q_1 = q_2$ y $r_1 = r_2$, $\vec{E}$ sería nulo.

Caso de estar el punto en P' (fig. 3), la composición es $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Como ahora el sentido es el mismo, el módulo de E es igual a la suma de $E_1 + E_2$.

Si una de las dos cargas es negativa, la intensidad del campo en P debida a esta carga es un vector opuesto al hallado al considerar dicha carga positiva.

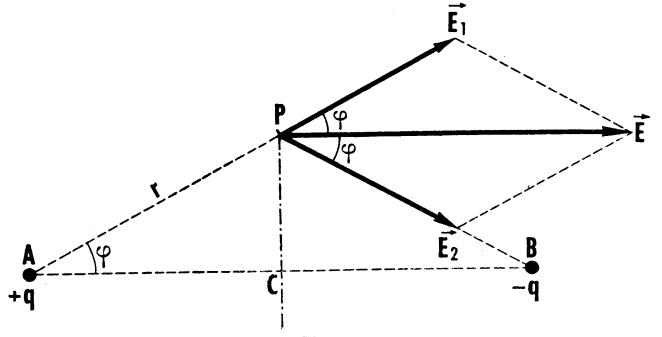


FIG. 4

Supongamos ahora el punto P situado en la mediatriz del segmento limitado por los dos puntos donde se hallan las cargas (fig. 4).

La distancia de P al segmento AB es h, y la distancia AB es d. Sean las cargas q y $-q$.

El módulo de la intensidad del campo creado por q vale $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$, el debido a $-q$ vale $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = E_1$; la dirección y el sentido van indicados en la figura 4. La intensidad del campo resultante es $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. El módulo de $\vec{E}$, diagonal del paralelogramo construido con las $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ (en este caso en un rombo, por ser $E_1 = E_2$), vale $E = 2E_1 \cos\varphi$.

Así pues,

$$E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= h^2 + \frac{d^2}{4} = \frac{4h^2+d^2}{4} \\ \cos\varphi &= \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{h^2+\frac{d^2}{4}}} = \frac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}} \end{aligned}\right\} \quad E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\frac{4h^2+d^2}{4}}\frac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}} = \frac{2qd}{\pi\varepsilon_0(4h^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La dirección de $\vec{E}$ es paralela a AB y su sentido hacia la derecha.

Aplicación numérica:

$$q = 10^{-4}\ \text{C}$$
$$d = 60\ \text{cm} = 0{,}6\ \text{m}$$
$$h = 40\ \text{cm} = 0{,}4\ \text{m}$$

$$E = 4.9.10^9\ \frac{2.10^{-4}.0{,}6}{(4.0{,}4^2+0{,}6^2)^{\frac{3}{2}}} = 43{,}2.10^5\ \text{newton/culombio}$$

Sean (fig. 5) tres cargas puntuales q_1, q_2, q_3, situadas cada una de ellas en vértices de un triángulo equilátero. Vamos a determinar la intensidad del campo creado por dichas cargas en el centro O del triángulo.

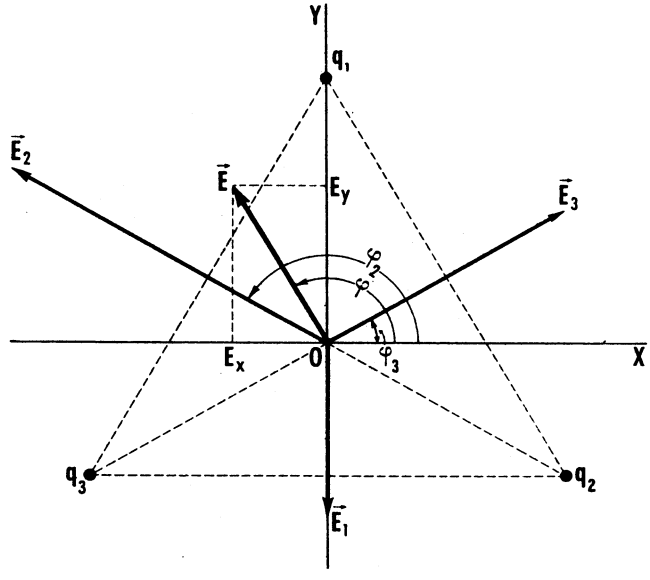


FIG 5

En este caso $r_1 = r_2 = r_3 = r =$ radio del círculo circunscrito al triángulo. Los módulos de los campos son:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}; \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}; \qquad E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r^2}$$

Para componer los vectores $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}$, utilizaremos el método de las proyecciones (citado en Cap. I). Tomamos los ejes OX, OY; la proyección de $\vec{E}$ sobre OX:

$$E_x = E_1 \cos\varphi_1 + E_2 \cos\varphi_2 + E_3 \cos\varphi_3$$

la proyección de $\vec{E}$ sobre OY:

$$E_y = E_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + E_2 \operatorname{sen}\varphi_2 + E_3 \operatorname{sen}\varphi_3$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = 270^\circ \\ \varphi_2 = 150^\circ \\ \varphi_3 = 30^\circ\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(-q_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} + q_3\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi\varepsilon_0 r^2}(q_3 - q_2) \\ E_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(-q_1 + q_2\dfrac{1}{2} + q_3\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^2}(q_2 + q_3 - 2q_1)\end{array}\right.$$

Podemos hallar $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$, y la dirección por $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{E_y}{E_x}$.

Aplicación numérica:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = 10^{-6}\ \text{C} \\ q_2 = 2\cdot 10^{-6}\ \text{C} \\ q_3 = 1{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{C} \\ \text{lado del triángulo, } l = 3\ \text{m}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} r = \dfrac{l\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ \text{m} \\ E_x = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\,9\cdot 10^9\,(1{,}5 - 2)\,10^{-6} = -\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\cdot 10^3 \\ E_y = \dfrac{1}{2\cdot 3}\,9\cdot 10^9\,(2 + 1.5 - 2)\,10^{-6} = 2{,}25\cdot 10^3\end{array}\right.$$

$$E = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\cdot 10^3\right)^2 + (2{,}25\cdot 10^3)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}10^3 \text{ newton/culombio}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2{,}25\cdot 10^3}{\frac{3}{4}\sqrt{3}\cdot 10^3} = -\sqrt{3}; \qquad \varphi = 120^\circ$$

Líneas de fuerza. — Se llama *línea de fuerza* de un campo eléctrico a una línea que es tangente en cada uno de sus puntos al vector intensidad del campo en dichos puntos.

De la definición se deduce que por cada punto de un campo eléctrico sólo pasa una línea de fuerza.

Podemos atribuir un sentido a las líneas de fuerza, que será el mismo que el del vector intensidad del campo eléctrico. De aquí deducimos que las líneas de fuerza parten de cargas positivas y se dirigen hacia cargas negativas. Si no existen cargas negativas se dirigen al infinito.

En la figura 6 hemos representado las líneas de fuerza de los campos creados con una carga puntual positiva (*a*), dos cargas puntuales, una positiva y otra negativa (*b*), y dos cargas puntuales positivas (*c*).

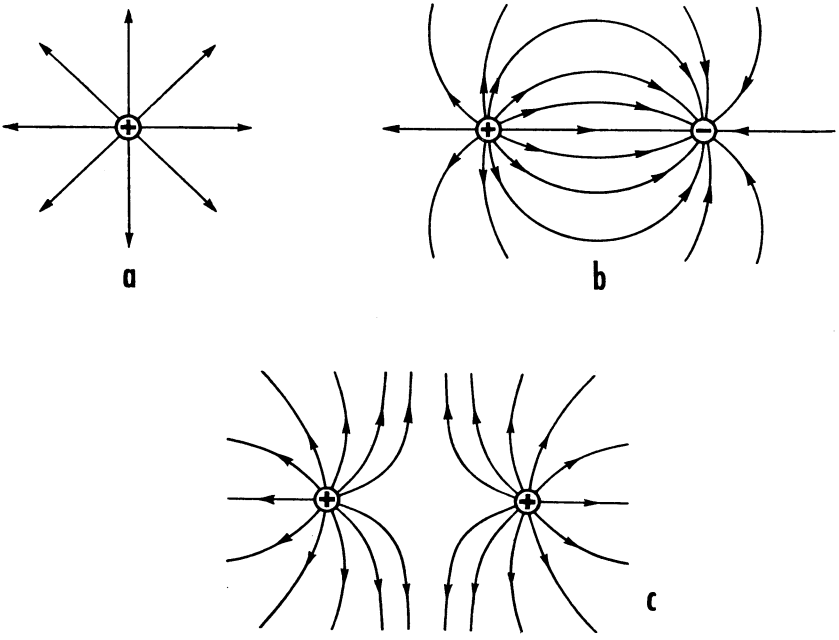


FIG. 6

Observemos en la figura que las líneas de fuerza no se cierran. En (*b*) observamos que de la carga positiva parte una línea de fuerza en la dirección de la recta que une a las dos cargas y dirigida de la + a la —, otra línea de fuerza en la misma dirección va en sentido contrario (hacia la izquierda).

Convencionalmente podemos dibujar la línea de fuerza de forma que el número de ellas que atraviesan la unidad de superficie normalmente a ella sea igual al valor de la intensidad del campo. De esta forma aumentamos el valor representativo de las líneas de fuerza. Donde las líneas de fuerza estén muy juntas, la intensidad del campo eléctrico es mayor que en la zona donde estén más espaciadas.

Un campo eléctrico se llama uniforme cuando la intensidad del campo es un vector constante en cada punto. En este caso las líneas de fuerza serán rectas paralelas, las cuales dibujaremos equidistantes.

Flujo eléctrico. — Consideremos un elemento de superficie dS situado en un campo eléctrico. Podemos representar dicho elemento de superficie por un vector de módulo el valor de la superficie, de dirección perpendicular a ella y sentido elegido de modo que si este elemento forma parte de una superficie cerrada, es de dentro a fuera.

Se llama flujo elemental del vector intensidad del campo a través de este elemento al producto escalar de la intensidad del campo en un punto del elemento de superficie por dicho elemento, o bien al producto del elemento de superficie por la proyección de la intensidad del campo sobre la normal a la superficie, o también el producto de la intensidad del campo por la proyección del elemento de superficie sobre un plano normal al campo. Escribiremos:

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot dS \cdot \cos \varphi$$

(siendo φ el ángulo que forman $\vec{E}$ y $\vec{dS}$, fig. 7).

Para hallar el flujo a través de una superficie, la descompondremos en elementos de superficie, hallamos el flujo elemental a través de cada elemento y sumamos los flujos elementales. Caso de ser el campo uniforme y perpendicular a la superficie, el flujo es igual al producto del módulo de la intensidad del campo por la superficie.

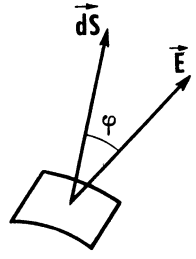


FIG. 7

Podemos dar un símil hidrodinámico. Supongamos un canal por donde circula agua a velocidad constante v. Sea S la sección recta del canal. La cantidad de agua que circula por unidad de tiempo es igual a la velocidad por la sección S, es decir, el caudal es igual al flujo del vector velocidad a través de la sección S. Consideremos una sección S' del canal oblicua a la dirección de la velocidad, y sea φ el ángulo que forma la velocidad con la normal a S'. Tenemos:

$$S = S' \cos \varphi \quad \text{y el flujo} \quad v \cdot S = v \cdot S' \cos \varphi$$

Según el convenio establecido para la representación de las líneas de fuerza, vemos que el flujo a través de una superficie coincide con el número de líneas de fuerza que pasan a través de dicha superficie.

Las dimensiones del flujo son

$$[\phi] = [E]L^2 = MLT^{-2}Q^{-1}L^2 = ML^3T^{-2}Q^{-1}$$

Teorema de Gauss. — Sea la superficie cerrada S con una carga puntual q en su interior situada en el punto P. Consideremos las líneas de fuerza que partiendo de q van a parar al contorno de dS (fig. 8). Tracemos una esfera de centro P y radio unidad. Las líneas de fuerza que partiendo

de q pasan por el contorno de dS delimitan una superficie dS' sobre la citada esfera, de forma que el flujo de dS es el mismo que a través de dS' (ya que las dos superficies elementales dS y dS' son atravesadas por el mismo número de líneas de fuerza). Como la intensidad del campo en un

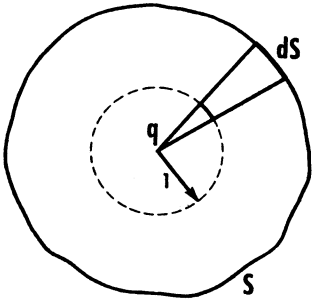


FIG. 8

punto de la superficie esférica es perpendicular a dicha superficie, ya que el campo creado por una carga puntual es radial, el flujo a través de dS' vale:

$$E \cdot dS' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{1^2} dS' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot dS'$$

Sumando los flujos elementales obtendremos el flujo total:

$$\phi = \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot dS' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Sigma\, dS' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi \cdot 1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Si hubiesen otras cargas razonaríamos del mismo modo y obtendríamos para el flujo total

$$\phi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \Sigma\, dS' + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \Sigma\, dS' + \ldots = \frac{1}{\varepsilon_0} (q_1 + q_2 + \ldots + q_n) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_1^n q_i$$

Es decir:

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_1^n q_i$$

como las q_i pueden ser positivas o negativas, el flujo a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas interiores dividida por ε_0. Esto constituye el teorema de Gauss.

Es fácil ver que el flujo total debido a cargas exteriores a la superficie considerada es nulo.

APLICACIONES. — 1.° La carga eléctrica en un conductor en equilibrio electrostático se halla en su superficie. Para demostrarlo vamos primero a

definir un conductor. Un cuerpo es conductor cuando las cargas eléctricas pueden desplazarse libremente por toda su masa. Si el conductor está en equilibrio electrostático, el campo en su interior debe ser nulo, pues de lo contrario las cargas por la acción del campo se desplazarían. El flujo a través de una superficie interior al conductor o infinitamente próxima a la de él será nulo (ya que $E = 0$), y por tanto, aplicando el teorema de Gauss, la suma de cargas interiores será nula. Todas las cargas están, pues, en la superficie.

2.° El campo creado por una esfera cargada en un punto exterior a ella es el mismo que el creado por una carga puntual situada en su centro y cuya carga tenga el mismo valor que la de la esfera. Tracemos una esfera concéntrica con la dada y de radio la distancia del centro al punto donde queremos hallar el campo. Por simetría, el campo en cada punto de la esfera trazada será radial y del mismo módulo. El flujo a través de dicha esfera, siendo r la distancia del centro al punto, vale $E \cdot 4\pi r^2$, y según el teorema de Gauss, debe ser igual a la suma de las cargas interiores, que valen la carga de la esfera Q. Luego

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q; \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

De aquí se deduce lo que habíamos dicho.

3.° Vamos a aplicar finalmente el teorema de Gauss al cálculo de la intensidad del campo creado por un plano indefinido uniformemente cargado. Llamaremos *densidad superficial* de carga a la carga por unidad de superficie. Tomemos un elemento de superficie dS en el plano. La carga elemental de dicho elemento vale $dq = \sigma dS$ (siendo σ la densidad superficial de carga). Tracemos las líneas de fuerza que pasan por los puntos del contorno de dS y limitemos dichas líneas por planos paralelos equi-

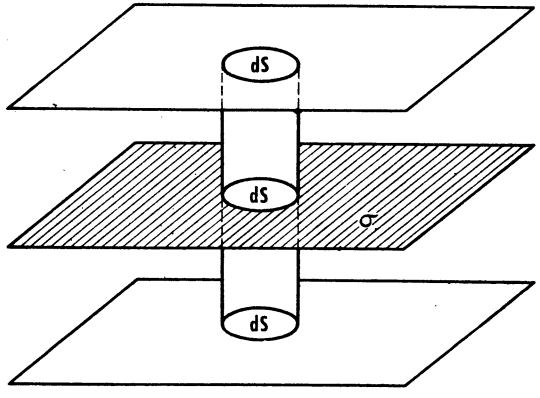


FIG. 9

distantes del plano cargado (fig. 9), uno por encima y otro por debajo. Por simetría, si el plano es indefinido, las líneas de fuerza serán perpendiculares al plano. Apliquemos el teorema de Gauss al flujo que sale de la superficie limitada por los planos trazados y las líneas de fuerza consideradas. El flujo total es igual a la suma del flujo que atraviesa las dos superficies, superior e inferior, ya que el flujo lateral es cero (no sale ninguna línea de fuerza lateral, pues cortaría a las consideradas, y esto es imposible). Por simetría, los módulos de las intensidades del campo son iguales. Los flujos valen $E \cdot dS$ y $E \cdot dS$, su suma es $2E dS$, y, según el teorema de Gauss, igual a

$$\frac{1}{\varepsilon_0} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \, dS$$

$$2E dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \, dS; \qquad E = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma$$

El campo es uniforme y su intensidad tiene por módulo $\frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma$, dirección perpendicular al plano, y el sentido en la parte superior hacia arriba y en la inferior hacia abajo.

Supongamos dos planos paralelos indefinidos uniformemente cargados, uno positivamente, con una densidad de carga σ, y el otro negativamente, con una densidad de carga $-\sigma$. En un punto situado entre los dos planos, la intensidad del campo debida al plano cargado positivamente vale $E_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma$ hacia abajo y perpendicular a los dos planos; la intensidad del campo debida al plano cargado negativamente vale $E_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma$ hacia abajo y perpendicular a los dos planos. Como los dos vectores tienen la misma dirección y sentido, el módulo de la suma es igual a la suma de los módulos

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma + \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$$

la dirección es perpendicular a los planos y el sentido del plano positivo al negativo. Entre los dos planos existe un campo uniforme de dirección normal a los planos, en sentido positivo-negativo y cuya intensidad en cualquier punto comprendido entre los planos tiene por módulo $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Concepto de potencial en un punto. — Consideremos una carga q situada en un punto de un campo eléctrico. Dicha carga estará sometida a una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. Siendo $\vec{E}$ la intensidad del campo en el punto donde está colocada la carga q. Si esta carga sufre un desplazamiento elemental por acción de la fuerza citada, el campo eléctrico efectúa un trabajo elemental que vale $d\mathfrak{T} = \vec{F} \cdot \vec{dr}$ (siendo $\vec{dr}$ el vector desplazamiento).

Supongamos ahora que el mismo desplazamiento lo efectuamos nosotros en sentido contrario. El trabajo lo hacemos contra las fuerzas del campo, su valor será el mismo que el efectuado por el campo, pero de signo contrario. Si la carga vale la unidad positiva, el trabajo es $d\mathfrak{T} = \vec{E} \cdot \vec{dr}$.

La diferencia de potencial entre dos puntos es igual al trabajo necesario para trasladar la unidad positiva de carga de uno a otro punto. Este trabajo es independiente del camino seguido, o sea sólo depende de la posición inicial y final de la carga. El trabajo necesario para trasladar una carga eléctrica de un punto a otro de un campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial por la carga y es independiente del camino seguido.

El potencial eléctrico en un punto es el trabajo necesario para trasladar la unidad positiva de carga eléctrica desde el infinito al punto considerado. Este trabajo será igual, pero de signo contrario, al que efectuarían las fuerzas del campo para trasladar la unidad de carga positiva desde el punto al infinito.

El potencial en el infinito se toma igual a cero. De aquí que el potencial en un punto es igual a la diferencia de potencial entre este punto y un punto infinitamente alejado.

De aquí puede definirse la unidad de potencial. En el sistema MKSC, diremos que entre dos puntos existe una diferencia de potencial igual a un *voltio* cuando el trabajo necesario para trasladar la carga de un culombio de uno a otro es igual a un julio. Escribiremos $\text{voltio} = \frac{\text{julio}}{\text{culombio}}$

En el sistema ues, la unidad de potencial es $\frac{\text{ergio}}{\text{ues (carga)}}$; de aquí que un $\text{voltio} = \frac{10^7 \text{ ergios}}{3 \cdot 10^9 \text{ (ues) } Q} = \frac{1}{300}$ ues (potencial). Las dimensiones del potencial son

$$[V] = \frac{[\mathfrak{T}]}{Q} = M L^2 T^{-2} Q^{-1}$$

Cuando la intensidad del campo es nula, la diferencia de potencial entre dos puntos es nula; los dos puntos están al mismo potencial. Esto ocurre en un conductor (según hemos visto). Todos los puntos de una masa conductora están al mismo potencial.

En un campo eléctrico, se llaman *superficies equipotenciales* a las que en todos sus puntos el potencial es el mismo. Al trasladar una carga de un punto a otro de una superficie equipotencial, el trabajo efectuado es nulo. En este caso $\vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$. Como $\vec{dr}$ está sobre la equipotencial y para cualquier $\vec{dr}$ debe ocurrir que su producto escalar con $\vec{E}$ sea nulo, deducimos que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie equipotencial. Las líneas de fuerza serán perpendiculares a las superficies equipotenciales. En la figura 10 hemos representado las líneas de fuerza y las equipotenciales (en modelo

bidimensional) debidas a dos pequeñas esferas con cargas de signo contrario.

Cálculo del potencial en un punto de un campo radial. — Consideremos una carga puntual (o una esfera cargada aislada). El campo creado por dicha carga es radial, las líneas de fuerza, según se vio en la figura 6 (*a*),

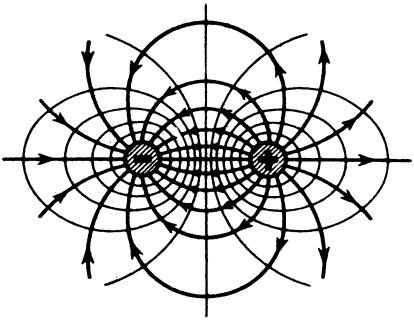


FIG. 10

son rectas que divergen del punto donde se halla la carga. El valor de la intensidad del campo en un punto situado a una distancia r del punto donde está situada la carga es $E = \frac{1}{4\varepsilon\pi_0}\frac{q}{r^2}$ (la dirección y sentido señalados por la correspondiente línea de fuerza).

Sean dos puntos A y B sobre la misma línea de fuerza (fig. 11) cuyas distancias al punto donde se encuentra la carga son r_1 y r_2 respectiva-

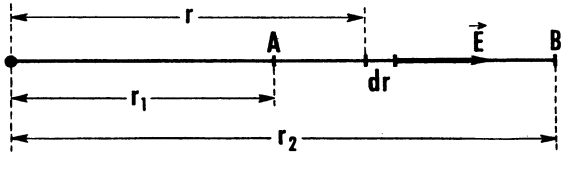


FIG. 11

mente. El trabajo elemental efectuado por las fuerzas del campo para desplazar la unidad de carga una distancia dr vale $\vec{E}\cdot\vec{dr}$. El trabajo efectuado al desplazar la unidad de carga de A a B vale la suma de los trabajos elementales $\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr}$. El trabajo necesario para efectuar el trabajo en sentido contrario, contra las fuerzas del campo, será igual a $-\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr}$

y este trabajo será igual a la diferencia de potencial entre los dos puntos. Como $\vec{E}$ y $\vec{dr}$ tienen la misma dirección podemos escribir el producto escalar $= E \cdot dr$. Así, pues, la diferencia de potencial entre A y B será:

$$V_B - V_A = -\int_A^B E \cdot dr; \quad \text{como} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$V_B - V_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

si el punto B está en el infinito, según la definición de potencial en un punto, tendremos el potencial en A. Como ahora $r_2 = \infty$ y $V_B = 0$,

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

El potencial en un punto de un campo eléctrico creado por una carga puntual q vale $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ (siendo r la distancia del punto del cual queremos hallar el potencial al punto ocupado por la carga).

El potencial en un punto creado por un sistema de cargas puntuales es igual a la suma de los potenciales debidos a cada una de ellas. El potencial en un punto P que dista r_1, r_2, r_3, ..., de los puntos donde se hallan lás cargas q_1, q_2, q_3, vale:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \ldots\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1^n \frac{q_i}{r_i}$$

(debe tenerse presente que algunas de las cargas pueden ser negativas, por tanto, la suma de la fórmula anterior es una suma algebraica).

Ejemplo: Sean las cargas $q_1 = 10^{-6}$ C, $q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ C, $q_3 = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ C (véase fig. 5), situadas cada una de ellas en un vértice de un triángulo equilátero de lado 3 m. Vamos a calcular el potencial en el centro de dicho triángulo.

$$r_1 = r_2 = r_3 = r = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ \text{m}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10^{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4{,}5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} = \frac{40{,}5}{\sqrt{3}} \cdot 10^3 V$$

$$V = 22\,953 \text{ voltios.}$$

Gradiente de potencial. — Consideremos un campo radial. En un punto de él la intensidad del campo vale $\vec{E}$. Según lo dicho anteriormente se verifica que el trabajo elemental efectuado por fuerzas ajenas al campo al desplazar una carga igual a la unidad positiva de carga, una distancia dr vale $-\vec{E} \cdot \vec{dr}$. Si el desplazamiento tiene la misma dirección que la intensidad del campo podemos escribir que el trabajo elemental vale $-E \cdot dr$ y este trabajo es igual a la diferencia de potencial dV entre los extremos de dr. Así pues, escribimos que

$$dV = -E \cdot dr, \quad \text{o bien} \quad E = -\frac{dV}{dr}$$

y diremos que la intensidad del campo es igual a la derivada del potencial con respecto a la dirección del campo cambiada de signo. A $\frac{dV}{dr}$ se le llama *gradiente de potencial.* (Si el campo no es radial, en el espacio, el gradiente de potencial en general tiene tres componentes, que referidas a tres ejes coordenados ortogonales serían las derivadas de V respecto a x, respecto a y, respecto a z.)

Vamos a deducir algunas consecuencias de la fórmula $E = -\frac{dV}{dr}$ En este caso E representa la componente de $\vec{E}$ segun la dirección de las líneas de fuerza (que siendo campo radial son rectas) y es la misma que la de $\vec{dr}$. Si la única componente de un vector es positiva, el vector tiene el mismo sentido que el considerado positivo para aquella dirección (o eje), y si es negativa tiene sentido contrario. En este caso E es positiva si $\frac{dV}{dr}$ es negativa, o sea, si V es decreciente y será negativa si V es creciente. De aquí deducimos que la intensidad del campo va dirigida hacia los potenciales decrecientes y lo mismo diremos de las líneas de fuerza del campo. Caso de una carga puntual positiva, las líneas de fuerza parten de la carga. Los potenciales van disminuyendo a medida que nos alejamos de dicha carga (según vemos de la fórmula $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$), de aquí vemos que la intensidad del campo se dirige hacia los potenciales decrecientes.

Al unir dos conductores que se hallan a distinto potencial, pasan cargas, del que está a mayor potencial al que está a potencial menor, hasta que los potenciales se igualan.

Considerando a la tierra como un conductor, al unir un conductor cargado, a tierra, se descarga, quedando ambos al mismo potencial. A la tierra se le asigna el potencial cero, o sea, el cuerpo unido a tierra queda a potencial cero.

Dadas dos superficies equipotenciales próximas, dV puede considerarse

la diferencia de potencial entre la segunda superficie y la primera, y dr la distancia Δr entre ellas (recuérdese que la intensidad del campo es perpendicular a las superficies equipotenciales). Así, pues,

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{\Delta r} = \frac{V_1 - V_2}{\Delta r}$$

Si dibujamos las superficies equipotenciales para diferencias de potencial constante, el campo es más intenso donde la separación de las superficies es menor. Esto es parecido a lo que ocurre con los planos topográficos, en los cuales la pendiente es mayor donde las curvas de nivel están más próximas; la pendiente es, en este caso, el gradiente de potencial.

De la fórmula anterior se deduce que la intensidad del campo tiene las dimensiones de $\frac{\text{potencial}}{\text{distancia}}$, por eso la podemos medir en el sistema MKSC en voltios/metro.

PRÁCTICAS

Materialización de campos electricos en modelos bidimensionales. — Tomemos una placa de vidrio y sobre ella pegamos dos discos de papel de estaño. Cargamos dichos discos por medio de una máquina electrostática. Pueden cargarse del mismo signo o de signos contrarios.

Espolvoreamos la placa con polvo fino de yeso cristalizado desde cierta altura y podemos dar ligeros golpes a la placa. Observaremos que los pequeños cristales se orientan de modo que nos dibujan las líneas de fuerza.

Puede repetirse el experimento variando la forma de los trozos de papel de estaño que se pegan al vidrio. Podemos también variar la distancia entre ellos.

Puede hacerse también, extendiendo sobre una lámina de vidrio, donde se han pegado dos discos de papel de estaño, una delgada capa de emulsión de negro de humo en aceite de parafina Al unir los discos citados a los polos de una máquina electrostática, observaremos cómo los finos granos de carbón se orientan y nos dibujan las líneas de fuerza del campo eléctrico que hemos establecido.

CUESTIONES

1. *¿Es aplicable la ley de Coulomb para hallar la fuerza entre cuerpos cargados de dimensiones arbitrarias?*
2. *¿Qué le ocurre a un electrón en un campo eléctrico?*
3. *¿Puede anularse el campo eléctrico creado por una carga puntual?*
4. *¿Pueden cortarse dos líneas de fuerza de un campo eléctrico?*
5. *¿Por qué las líneas de fuerza nos representan un campo eléctrico?*

6. ¿Puede ser nula la intensidad de un campo eléctrico en un punto sin serlo el potencial en el mismo punto?

7. ¿Puede ser nulo el potencial en un punto de un campo eléctrico y no serlo la intensidad del campo en el mismo punto?

8. ¿Pueden ser nulos en un mismo punto la intensidad del campo eléctrico y el potencial y no serlo en otros?

9. La intensidad del campo eléctrico en un punto próximo a un conductor cargado es perpendicular a la superficie del conductor. ¿Por qué?

10. Comprobar que las dimensiones de la intensidad del campo eléctrico coinciden con las de fuerza/carga y potencial/distancia.

11. Comprobar que las dimensiones del flujo coinciden con las de $\frac{Q}{[\epsilon_0]}$.

PROBLEMAS

1. Dos cargas eléctricas puntuales cuyos valores son $5 \cdot 10^{-8}$ C y 10^{-8} C están separadas 30 cm. Hallar en qué punto de la recta que las une, la fuerza ejercida sobre otra carga puntual es nula

2. Dos cargas puntuales de 0.0000002 C y 0.0000004 C distan 0,6 m. Determinar la intensidad del campo eléctrico en un punto, situado a 2 m del punto medio del segmento que une las cargas, sobre la misma recta de unión. Primero, caso de estar el punto a la derecha de la segunda carga, y segundo, si está a la izquierda.

3. En los tres vértices consecutivos de un cuadrado de 1.414 m de lado tenemos las siguientes cargas: 30 ues, 90 ues y 10^{-8} C. Determinar la intensidad del campo eléctrico en el cuarto vértice.

4. Una carga positiva de 0,000000008 C está en cierto punto. A un metro de la carga colocamos otra negativa. ¿Cuál debe ser el valor de la carga negativa para qué la intensidad del campo en el punto medio del segmento que une las cargas sea cuatro veces mayor que la intensidad del campo en el mismo punto antes de colocar la segunda carga?

5. Determinar la fuerza ejercida sobre una carga de 80 ues situada en el centro del cuadrado citado en el problema 3 con las mismas cargas en sus vértices.

6. En los vértices consecutivos de un cuadrado de 4 m de lado tenemos las cargas de 60 ues, 40 ues, —60 ues y —40 ues. Determinar la intensidad del campo y el potencial en el centro.

7. Un plano cargado uniformemente con la densidad superficial de carga de 0,00002 C/m^2 crea un campo uniforme. ¿Cuál es su valor?

8. Dos puntos distan del plano del problema anterior 2 y 6 metros. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos puntos? ¿Cuál de los dos puntos está a mayor potencial?

9. Una carga de 0.00000001 C dista 4 m de otra de 80 ues. ¿Qué trabajo debemos realizar para trasladar la primera carga a un punto que dista 2 m de la segunda?

10. Tenemos una esfera cargada con $8 \cdot 10^{-8}$ C. Situamos una carga de 400 ues a 2 m del centro de la esfera. ¿Cuál es la fuerza repulsiva? Calcular el trabajo de las fuerzas del campo al repeler a la carga hasta el infinito.

11. En el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo tenemos una carga de 0.00000004 C. Determinar el trabajo necesario para desplazar una carga de 800 ues a lo largo de la hipotenusa. Los catetos miden 30 cm y 40 cm.

Nota. — En todos estos problemas consideramos las cargas en el vacío.

CAPÍTULO XV

CONDENSADORES

Cargas eléctricas inducidas sobre un conductor y sobre un dieléctrico. — Tenemos un conductor eléctricamente cargado con la carga $+Q$, próximo a él colocamos otro conductor inicialmente en estado neutro. Experimentalmente podemos comprobar que este segundo conductor presenta cargas eléctricas positivas en la superficie más alejada del conductor cargado y cargas negativas en la superficie próxima al citado conductor. Retirando el conductor cargado *(conductor inductor)*, el segundo vuelve a quedar en estado neutro, lo cual indica que las cargas positivas y las negativas que habían aparecido eran iguales.

A este fenómeno se le llama *influencia o inducción electrostática*. Las cargas eléctricas que han aparecido en el segundo conductor *(conductor inducido)* se llaman cargas eléctricas inducidas.

Podemos explicar el fenómeno de una manera elemental teniendo presente que en un conductor en estado neutro podemos considerar que existe el mismo número de cargas positivas que negativas, por esto está en estado neutro. El campo eléctrico en el interior del conductor influenciado debe ser nulo, como en todos los conductores en equilibrio electrostático. En un punto interior próximo a la superficie más alejada, para que el campo sea nulo, debe haber un campo cuya intensidad sea un vector opuesto a la intensidad del campo debida al conductor inductor. Para que ocurra esto, las cargas inducidas en dicha superficie deben ser positivas. (La aportación a la intensidad del campo debida a las cargas más alejadas tiene poca importancia.) Razonando análogamente en un punto interior próximo a la superficie cercana al conductor inductor, deduciremos que las cargas deben ser negativas (fig. 12).

Al unir a tierra el conductor inducido, las cargas positivas pasan a tierra, pero las negativas permanecen de forma que el potencial de cualquier punto del conductor sea nulo. Se cumple que el potencial positivo en un punto debido al conductor inductor más el potencial, en el mismo punto, debido a las cargas negativas debe ser cero. Al interrumpir la comunicación con tierra el conductor inducido quedará cargado negativamente aunque retiremos el conductor inductor.

Consideremos las líneas de fuerza que parten de una superficie elemental dS del conductor, y que nos determinan sobre el conductor inducido una superficie elemental dS'. Formemos una superficie cerrada limitando los extremos de las líneas de fuerza dentro de cada conductor por una superficie cualquiera (fig. 12).

El flujo a través de la superficie así formada es cero. Efectivamente, el flujo lateral es nulo por ser el campo tangente a las líneas de fuerza y, por

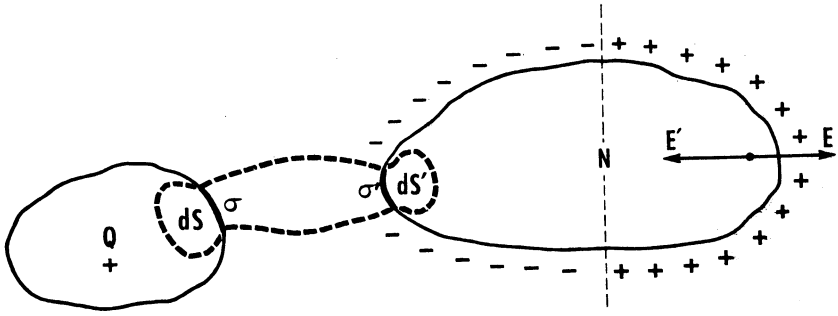


FIG. 12

tanto, normal a cualquier superficie elemental sobre la superficie lateral. El flujo a través de las superficies extremas es también cero por serlo la intensidad del campo en el interior de un conductor. Aplicando el teorema de Gauss resulta que la suma de las cargas interiores ha de ser nula. Las cargas interiores a la superficie considerada son: σdS y $\sigma' dS'$; su suma ha de ser nula, es decir,

$$\sigma dS + \sigma' dS' = 0 \quad \text{o sea} \quad \sigma dS = -\sigma' dS' \quad \sigma' = -\sigma \frac{dS}{dS'}.$$

La densidad superficial de las cargas inducidas σ' que es de signo contrario a σ, es directamente proporcional a σ, a dS e inversamente proporcional a dS'. A los elementos de superficie dS y dS' se les llama *elementos* correspondientes y la relación entre las σ y σ' con dS y dS' se llama teorema de los elementos correspondientes.

Si el segundo conductor rodea completamente al conductor cargado, las cargas inducidas en la cara interna del conductor inducido tienen el mismo valor que las del conductor cargado, pero son de signo contrario. Vamos a demostrarlo: Sean los conductores A y B. El A tiene una carga igual a Q. Apliquemos el teorema de Gauss al flujo que atraviesa la superficie cerrada S (interior al conductor B) (fig. 13). Debido a que la intensidad del

campo en cualquier punto del interior de un conductor es nula, el flujo a través de S será nulo, y por tanto, según el teorema de Gauss, será nula la suma de las cargas interiores. Como en los conductores, las cargas son superficiales, las cargas del conductor B, en su cara interna, serán iguales a $-Q$, ya que su suma con Q vale cero, como hemos dicho antes.

Si el segundo conductor estaba inicialmente descargado, según el principio de la conservación de las cargas eléctricas deben aparecer, al colocar

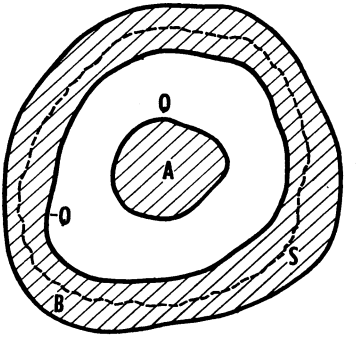


FIG. 13

a A en su interior, cargas iguales a Q en su superficie exterior, para que la suma de cargas continúe siendo nula.

Cuando se cumple la condición anterior de que las cargas inducidas en la cara próxima al inductor, son iguales aunque de signo contrario a las del inductor se dice que existe *influencia total.* Siempre que el conductor inducido rodee completamente al inductor, hay influencia total.

Para comprobar experimentalmente la aparición de cargas inducidas podemos hacerlo con el *electroscopio,* que sirve para conocer la existencia de cargas eléctricas. Consiste en un recipiente con una varilla metálica que en su parte inferior (en el interior del recipiente) tiene sujetas dos láminas de oro o aluminio finísimas de forma que puedan moverse alrededor del eje de sujeción con la varilla. Dicha varilla atraviesa el recipiente a través de un tapón hecho con una sustancia muy aislante (por ejemplo, ámbar). Termina en su parte superior en una bola metálica. Tocando dicha bola con un cuerpo cargado, las láminas adquieren cargas del mismo signo, se repelen y divergen.

Para comprobar la inducción electrostática, tomamos un cilindro, llamado de Faraday, metálico y de boca estrecha (fig. 14 *a*) de forma que introduciendo un cuerpo cargado exista influencia total. Introducimos una bola cargada suspendida por un hilo aislante. Poniendo en contacto la parte

exterior del cilindro con el electroscopio, las láminas divergen. Es que ha aparecido una carga en la parte exterior. Para que se cumpla el principio de la conservación de las cargas eléctricas debe de haber en la superficie interior una carga del mismo valor, pero de signo contrario. Para comprobar que la influencia es total, tocamos con la bola la parte interna del cilindro. Si las cargas de la bola y la interna eran iguales, pero de signo contrario, la bola se habrá descargado por anularse su carga con la interna. Puede esto constatarse uniendo la parte exterior a tierra, después del contacto bola-parte interna y comprobaremos quitando la conexión a tierra y conectando al electroscopio, que éste no acusa carga alguna. Si no se hubiese anulado la carga, el electroscopio lo indicaría.

Antes de estudiar el comportamiento de un dieléctrico situado en un campo eléctrico, estudiaremos el campo en un punto próximo a un conductor cargado.

Sea un conductor cargado, cuya densidad superficial de cargas es σ. La superficie del conductor es una superficie equipotencial; tracemos otra equipotencial muy próxima. Sobre la equipotencial trazada limitamos un elemento de superficie dS, y consideremos líneas de fuerza que pasen por el contorno de dS (fig. 14 b). Estas líneas de fuerza determinan sobre la

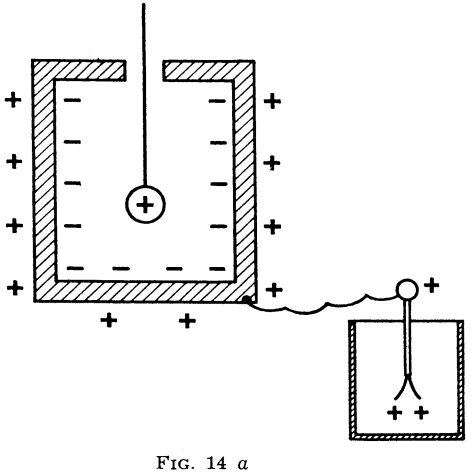


FIG. 14 *a*

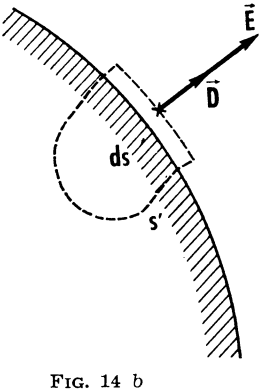


FIG. 14 *b*

superficie del conductor un elemento de superficie igual a dS. Formemos una superficie cerrada limitando las líneas de fuerza por la parte interior al conductor, por medio de una superficie cualquiera S. Vamos a calcular el flujo total a través de la superficie cerrada que hemos obtenido. Como el campo en el interior del conductor es nulo, el flujo a través de S igual a cero, el flujo lateral es también nulo por ser la intensidad del campo tangente a las líneas de fuerza; sólo nos queda el flujo a través de dS

que vale $E \cdot dS$, ya que E es perpendicular a la equipotencial. Aplicando el teorema de Gauss tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma q \\ E dS &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma dS \end{aligned}\right\} E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$$

La intensidad del campo eléctrico en un punto próximo a un conductor cargado es perpendicular a la superficie del conductor, su sentido es de dentro a fuera (si las cargas son positivas, si son negativas el sentido es contrario), su módulo $E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$.

Podemos simplificar la fórmula llamando D a $\varepsilon_0 E$, entonces queda:

$$\varepsilon_0 E = \sigma \qquad D = \sigma$$

$\vec{D}$ es un vector llamado *inducción eléctrica*, de la misma dirección y sentido que $\vec{E}$ y cuyo módulo es $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ (todo lo dicho es referente al vacío). En un un punto próximo a un conductor coincide su valor con el de la densidad superficial de cargas. Sus dimensiones son

$$[D] = [\varepsilon_0]\,[E] = L^{-3} M^{-1} T^2 Q^2 \cdot L M T^{-2} Q^{-1} = L^{-2} Q$$

las cuales coinciden con las de la densidad superficial de cargas eléctricas. En el sistema MKSC se mide en culombios/m^2.

Si la fórmula que nos expresa el teorema de Gauss la escribimos

$$\varepsilon_0 \phi = \Sigma q \qquad \int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{ds} = \Sigma q \qquad \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \Sigma q$$

El flujo del vector inducción a través de una superficie cerrada es igual a la suma de las cargas interiores.

Dieléctricos. — Consideremos la estructura de un dieléctrico. Las cargas de las partículas que constituyen la molécula pueden estar distribuidas de modo que el centro de gravedad de las cargas positivas y las negativas no coincide (moléculas polares). Entonces se dice que forman un dipolo eléctrico.

Según sabemos, una carga eléctrica positiva en un campo eléctrico está sometida a una fuerza dirigida según el campo y de módulo el producto de la carga por la intensidad del campo; si la carga es negativa, la fuerza tiene sentido contrario al campo.

Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico está sometido a un par de fuerzas, el módulo de cuyas fuerzas es el producto de la carga por la in-

tensidad del campo; así pues, el par de fuerza tiene por momento el producto de la carga por la intensidad del campo, por la distancia entre cargas y por el seno del ángulo que forma la recta que une las cargas con la dirección del campo eléctrico. El dipolo se orienta de forma que el momento del par sea cero, para que haya equilibrio. Al situar un dieléctrico constituido por moléculas polares en un campo eléctrico, los dipolos se orientan en la dirección del campo de forma que el sentido del campo sea de carga negativa a positiva. Si desaparece el campo, por anularse o porque retiramos el dieléctrico del campo, la acción orientadora cesa y, debido a la agitación térmica, los dipolos quedan orientados al azar.

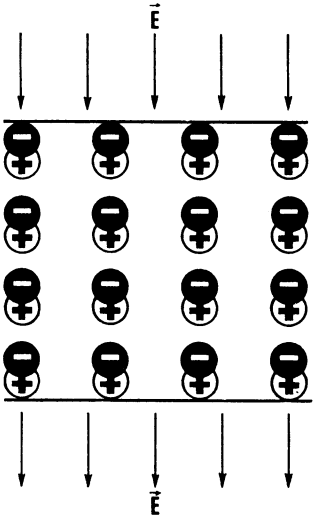


FIG. 15

Supongamos que el centro de gravedad de las cargas eléctricas coincide (moléculas no polares); al situar la molécula en un campo eléctricò, las cargas positivas tienden a desplazarse en la dirección y sentido del campo, mientras las negativas lo hacen en sentido contrario. Las cargas no se mueven como en los conductores, se desplazan poquísimo. Estos pequeñísimos desplazamientos hacen que las moléculas se conviertan en dipolos, y por tanto se orientarán en el campo eléctrico como los dipolos del caso anterior; estos dipolos son ahora inducidos por el campo. Al fenómeno citado en ambos casos se le llama *polarización del dieléctrico.*

Como resultado de la polarización nos aparecen cargas negativas en la superficie del dieléctrico por donde entran las líneas de fuerza, y positivas sobre la superficie por donde salen dichas líneas.

Cada una de las cargas del dipolo se anula con la siguiente (fig. 15); quedan sólo las superficiales, llamadas *cargas de polarización.*

Este hecho tiene cierta analogía con el fenómeno de la inducción electrostática en los conductores. En los dieléctricos, no obstante, el fenómeno es distinto. Las cargas no las podemos separar como en los conductores inducidos electrostáticamente y el campo en el interior del dieléctrico no se anula, aunque disminuye por efecto de las cargas de polarización.

Consideremos un conductor cargado cuya densidad superficial de cargas sea σ, rodeado de un medio dieléctrico. El campo en el dieléctrico puede considerarse debido a las cargas del conductor y a las de polarización. La intensidad del campo en un punto dentro del dieléctrico muy próximo al conductor será el debido a la densidad de cargas superficiales σ del conductor y a la densidad de cargas de polarización, que será $-\sigma_p$. Según sabemos, la intensidad del campo en un punto próximo a un conductor vale la densidad de cargas dividido por ε_0. La densidad ahora es $\sigma - \sigma_p$; por lo tanto

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma_p); \qquad \varepsilon_0 E = \sigma - \sigma_p$$

en el vacío $E_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$, luego $\sigma = \varepsilon_0 E_0$; la anterior fórmula puede escribirse: $\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 - \sigma_p$, o bien: $\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + \sigma_p$.

Las cargas de polarización dependen del campo eléctrico $\vec{E}$. En un dieléctrico homogéneo e isótropo son proporcionales a la intensidad del campo, luego $\sigma_p = \psi E$, siendo ψ la susceptibilidad absoluta del medio. Sustituyendo en la fórmula anterior queda:

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + \psi E = (\varepsilon_0 + \psi)E = \varepsilon E$$

A $\varepsilon_0 + \psi$ se le llama ε, que es la constante dieléctrica absoluta del medio dieléctrico. La constante dieléctrica absoluta tiene las mismas dimensiones que la del vacío. Llamamos constante dieléctrica relativa del medio respecto al vacío a $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, que es un número abstracto. Escribimos la fórmula anterior

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Como ψ es siempre mayor que cero,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_0 + \psi}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\psi}{\varepsilon_0} > 1 \qquad E < E_0$$

Luego el campo en el interior de un dieléctrico es menor que en el vacío para un mismo valor de σ. A $\frac{\psi}{\varepsilon_0}$ se le llama susceptibilidad relativa.

El razonamiento anterior lo hemos hecho para un punto próximo a un conductor.

Vamos a generalizar el resultado a cualquier punto del dieléctrico. Como

$$\varepsilon_0 E_0 = \sigma = \varepsilon E \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$

Esta fórmula nos indica que para determinar el campo, caso de existir un medio dieléctrico que rodee al conductor, debemos dividir la densidad superficial de cargas por la constante dieléctrica relativa. Para hallar la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto del dieléctrico podemos considerar que estamos en el vacío y que la densidad de cargas del conductor es $\frac{\sigma}{\varepsilon_r}$; por tanto, la intensidad del campo en un punto del dieléctrico es igual a la intensidad del campo considerando que estuviese en el vacío dividido por la constante dieléctrica relativa (del medio dieléctrico respecto al vacío).

La constante dieléctrica relativa del aire es $\varepsilon_r = 1{,}0006$ (en condiciones normales), luego el campo eléctrico debido a conductores que están en el aire es prácticamente el mismo que si estuvieran en el vacío.

El producto εE es la inducción eléctrica D en el dieléctrico, o sea $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

En las fórmulas electrostáticas mencionadas hasta ahora, en donde intervenga el campo eléctrico, si en lugar del vacío existe un medio dieléctrico de constante dieléctrica absoluta ε, sustituiremos la ε_0 de las fórmulas por la ε. Por ejemplo, el campo creado por una carga puntual q en un punto situado a una distancia r de dicha carga en el vacío tiene una intensidad que vale

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

en un dieléctrico de constante dieléctrica ε

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$

Si consideramos la inducción eléctrica $D = \varepsilon E = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}$, las fórmulas son las mismas que en el vacío (ya que en el vacío $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$). Por ejemplo, el teorema de Gauss se escribe

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon}\Sigma q \qquad \int_S \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{dS} = \Sigma q \quad \text{o bien} \quad \int_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \Sigma q$$

Vamos a calcular las cargas de polarización en un caso sencillo. Supongamos el caso de que el campo es uniforme. Colocamos una lámina

dieléctrica perpendicular a la dirección del campo. La constante dieléctrica relativa vale ε_r. El campo antes de colocar la lámina era E_0. Dentro de la lámina será $E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \psi$$

$$\psi = \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)$$

$$\sigma_\rho = \psi E = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E$$

Problema: Una lámina dieléctrica cuya constante dieléctrica relativa es igual a 4, se coloca entre dos placas metálicas paralelas, con cargas de signo contrario, entre las cuales existe un campo uniforme cuya intensidad en el vacío era de 120 voltios/m. Determinar la intensidad del campo en el interior del dieléctrico y el valor de la densidad de las cargas de polarización.

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{120}{4} = 30 \text{ V/m}$$

$$\sigma_\rho = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot (4 - 1) \cdot 30 = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^{-8} \text{ culombios/m}^2$$

Esta σ_ρ es negativa en la superficie del dieléctrico por donde entran las líneas de fuerza y positiva en la superficie por donde salen dichas líneas.

Condensadores: capacidad de un condensador. — Dos conductores en presencia, para los cuales exista influencia total, forman un condensador. A los dos conductores se les llama *armaduras* del condensador. Sean los conductores A y B (fig. 16). Cargamos la armadura A con la carga Q.

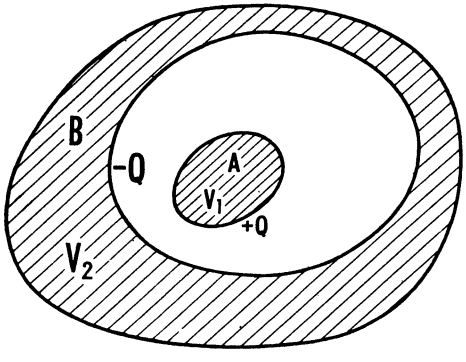


FIG. 16

La carga de la superficie interna de la armadura B es $-Q$, ya que hemos dicho que existía influencia total. El potencial de la armadura A es V_1, y el de la B es V_2; llamaremos capacidad del condensador al cociente entre la carga de la armadura Q, y la diferencia de potencial entre las armaduras $V_1 - V_2$, escribiremos:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

(de ahora en adelante a la carga Q de una armadura le llamaremos carga del condensador).

Las dimensiones de la capacidad son:

$$C = \frac{Q}{[V]} = \frac{Q}{L^2 MT^{-2} Q^{-1}} = L^{-2} M^{-1} T^2 Q^2$$

En el sistema MKSC, la unidad de capacidad es el *faradio* (F), que es la capacidad de un condensador, que al cargar sus armaduras con un culombio la diferencia de potencial entre ellas es de 1 voltio. Como esta unidad es muy grande se utilizan sus submúltiplos *microfaradio* (μF) $= 10^{-6}$ faradios y *picofaradio* (pF $= \mu\mu$F) $= 10^{-12}$ faradios

$$1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F} = 10^6\ \text{pF} \qquad 1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F} = 10^{-6}\ \mu\text{F}$$

En el sistema ues la unidad se llama *centímetro*. Un faradio equivale a $\frac{3 \cdot 10^9}{\frac{1}{300}} = 9 \cdot 10^{11}$ cm, 1 picofaradio $= 0{,}9$ cm.

Cuando entre las armaduras de un condensador existe un dieléctrico, el campo eléctrico es ε_r veces menor que el que existiría si las armaduras estuviesen en el vacío (o prácticamente en el aire). De aquí deducimos, recordando la definición de diferencia de potencial entre dos puntos, que la diferencia de potencial entre armaduras cuando entre ellas existe un dieléctrico es igual a la diferencia de potencial entre armaduras cuando estaban en el vacío dividida por la constante dieléctrica relativa. La capacidad

$$C = \frac{Q}{\frac{V_1 - V_2}{\varepsilon_r}} = \varepsilon_r \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon_r C_0,$$

es decir, la capacidad de un condensador entre cuyas armaduras tenemos un dieléctrico es igual a la capacidad considerando las armaduras en el vacío, multiplicada por la constante dieléctrica relativa del medio interpuesto entre armaduras.

Estudio del condensador plano. — Dos conductores planos y paralelos constituyen un condensador plano. Para que pueda considerarse que existe influencia total, las dimensiones de las armaduras deben ser grandes comparadas con la distancia entre ellas.

Cargando una armadura con la carga Q en la cara próxima de la otra, aparece una carga inducida $-Q$ que tiene el mismo valor, pero es de signo contrario. El campo creado entre las armaduras puede considerarse creado por una distribución de cargas en dos planos paralelos indefinidos uno con carga positiva y el otro con carga negativa. Las densidades de carga son

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad \text{y} \quad -\sigma = -\frac{Q}{S}.$$

Según hemos visto (pág. 218), el campo es uniforme y vale

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$

Siendo el campo uniforme la diferencia de potencial entre las armaduras A y B será (fig. 17):

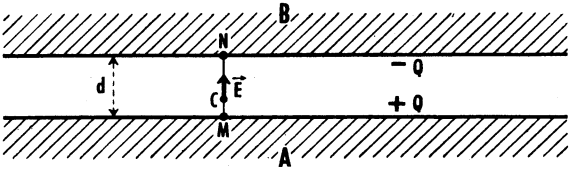


FIG. 17

$$V_M - V_N = E \cdot d = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{S} \cdot d$$

y la capacidad

$$C = \frac{Q}{V_M - V_N} = \frac{Q}{\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{S}d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d};$$

en el sistema MKSC

$$C = \frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{S}{d}$$

S en m^2, d en m, C en faradios.

Si entre las armaduras existe un dieléctrico de constante dieléctrica relativa ε_r. La capacidad será:

$$C = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d}.$$

De aquí deducimos que la capacidad es directamente proporcional a la constante dieléctrica, a la superficie de las armaduras e inversamente proporcional a la distancia entre dichas armaduras.

Problema. — Calcular la capacidad de un condensador plano formado por dos discos metálicos de radio 2 m que distan 25 mm. Entre ellas está interpuesta una lámina de parafina, de constante dieléctrica relativa $\varepsilon_r = 2$. Siendo la diferencia de potencial entre armaduras igual a 200 voltios hallar la carga de las armaduras y la intensidad del campo eléctrico entre las mismas.

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = 2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\pi \cdot 2^2}{0{,}025} = \frac{2}{225} 10^{-6} \text{ F} = \frac{2}{225} \mu\text{F}$$

$$Q = C (V_1 - V_2) = \frac{2}{225} \cdot 10^{-6} \cdot 200 = \frac{4}{225} \cdot 10^{-4} \text{ culombios}$$

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d} = \frac{200}{0{,}025} = 8000 \text{ V/m}$$

Fuerza atractiva entre las armaduras de un condensador plano. — El campo creado por una armadura, por ejemplo la positiva, puede considerarse igual al debido a un plano indefinido uniformemente cargado que vale (pág. 216)

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma$$

La fuerza ejercida sobre un elemento dS de la otra armadura será igual a $dF = E \cdot dq = E (-\sigma\, dS) = -E \sigma\, dS$ (o sea fuerza atractiva). La fuerza sobre la armadura será:

$$F = E \sigma S = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 S = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2}{S}$$

Energía de un condensador cargado. — Supongamos que para cargar un condensador trasladamos cargas de una armadura a otra. Si las cargas trasladadas son positivas, la armadura que recibe las cargas va cargándose positivamente y la que las pierde se carga negativamente con cargas del mismo valor. Supongamos que se verifica la carga por traslación de peque-

ñas cargas dq. Cuando la diferencia de potencial vale $V_A - V_B$, el trabajo para trasladar una carga elemental dq de una a otra armadura vale:

$$d\mathcal{E} = (V_A - V_B)\, dq$$

pero $V_A - V_B = q/C$, luego:

$$d\mathcal{E} = \frac{q}{C}\, dq$$

Para hallar el trabajo total efectuado en todo el proceso de carga del condensador, sumaremos los trabajos elementales desde que la carga es 0 hasta que la carga sea la total Q; así pues, tendremos que integrar $d\mathcal{E}$ entre 0 y Q:

$$\mathcal{E} = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}.$$

La energía del condensador sería igual al trabajo efectuado al cargarlo; luego, la energía del condensador cargado será:

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,\frac{Q}{C}\,Q = \frac{1}{2}\,(V_1 - V_2)\,Q = \frac{1}{2}\,C\,(V_1 - V_2)^2$$

De aquí deducimos que si mantenemos la diferencia de potencial constante, la energía del condensador es directamente proporcional a la capacidad. Para dos condensadores de la misma capacidad, sus energías están en razón directa de los cuadrados de la diferencia de potencial entre sus respectivas armaduras. Dos condensadores, cuyas armaduras tengan la misma carga, sus energías están en razón inversa de sus capacidades. Si tienen la misma capacidad, sus energías están en razón directa de los cuadrados de sus cargas.

Problema: Cargamos un condensador de 8 μF, siendo la diferencia de potencial entre sus armaduras de 500 voltios. ¿Cuál es su energía? Determinar la potencia media de la máquina eléctrica que ha efectuado la carga si ésta ha durado $\frac{1}{10}$ seg.

$$U = \tfrac{1}{2}\,C\,(V_1 - V_2)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2 = 1 \text{ julio}$$

$$p = \frac{\mathcal{E}}{t} = \frac{U}{t} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \text{ vatios}$$

Asociación de condensadores. — La asociación de varios condensadores puede hacerse en paralelo, en serie, o pueden asociarse de forma mixta.

Para asociar condensadores en paralelo o derivación, se unen entre sí una de las armaduras de cada condensador, y por otro lado se unen entre sí las otras (fig. 18). (Para representar esquemáticamente un condensador se dibujan dos segmentos iguales y paralelos.) Se establece entre A y B una diferencia de potencial $V_A - B_B$, que será común a todos ellos. Llamaremos condensador equivalente a aquel que entre sus armaduras exista la misma diferencia de potencial $V_A - V_B$, y cuya carga sea la carga total de los condensadores conectados. La carga de los condensadores es:

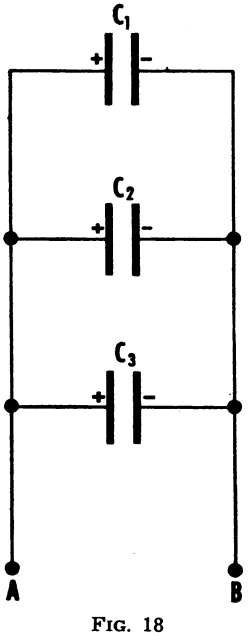


FIG. 18

$$Q_1 = C_1 (V_A - V_B),\quad Q_2 = C_2 (V_A - V_B),$$
$$Q_3 = C_3 (V_A - V_B);$$

la total,

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)(V_A - V_B)$$

La capacidad del condensador equivalente,

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)(V_A - V_B)}{V_A - V_B} = C_1 + C_2 + C_3$$

En general $C = \sum_1^n C_i$ si son iguales $C = nC_i$. Es decir, asociando condensadores en paralelo obtenemos una capacidad suma de las capacidades de cada uno de los condensadores. La energía de cada condensador vale

$$U_1 = \tfrac{1}{2} C_1 (V_A - V_B)^2 \qquad U_2 = \tfrac{1}{2} C_2 (V_A - V_B)^2; \qquad U_3 = \tfrac{1}{2} C_3 (V_A - V_B)^2$$

la total

$$U = \tfrac{1}{2} (C_1 + C_2 + C_3)(V_A - V_B)^2 = \tfrac{1}{2} C (V_A - V_B)^2$$

Para asociar condensadores en serie se une una de las armaduras del primer condensador con una del segundo, la que queda libre del segundo

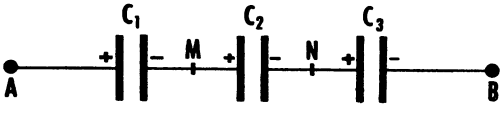


FIG. 19

con una del siguiente, y así sucesivamente (fig. 19). Entre las armaduras extremas establecemos una diferencia de potencial $V_A - V_B$. Debido a la influencia total, la carga de cada condensador es la misma. En efecto, si la carga de una armadura del primer condensador es Q, la de la otra es $-Q$; en la primera armadura del segundo condensador nos aparece la carga Q, pues estas dos armaduras unidas forman un conductor, el cual, si por influencia en una superficie aparece una carga $-Q$, en la superficie extrema aparece la carga $+Q$. Por influencia esta carga hace que en la otra armadura del segundo condensador aparezca la carga $-Q$, y así sucesivamente. La diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador vale:

$$\left.\begin{aligned} V_A - V_M &= \frac{Q}{C_1} \\ V_M - V_N &= \frac{Q}{C_2} \\ V_N - V_B &= \frac{Q}{C_3} \end{aligned}\right\} \text{ sumando } \quad V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Dividiendo por Q tenemos

$$\frac{V_A - V_B}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$\frac{V_A - V_B}{Q}$ es $\frac{1}{C}$, siendo C la capacidad de un condensador que cargadas sus armaduras con una carga Q la diferencia de potencial entre ellas es igual a $V_A - V_B$ (la diferencia de potencial entre las armaduras extremas de los condensadores en serie). Este condensador es el equivalente a los condensadores en serie. En general, para calcular la capacidad del condensador equivalente a n condensadores colocados en serie hallaremos $\frac{1}{C} = \sum_1^n \frac{1}{C_i}$. Si fuesen iguales a C_1

$$\frac{1}{C} = \frac{n}{C_1}; \qquad C = \frac{C_1}{n}$$

la capacidad es n veces menor.

Supongamos n condensadores en serie. Conocemos la capacidad de cada uno y la diferencia de potencial entre las armaduras extremas. Queremos calcular la diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador. Para ello dividiremos la carga de sus armaduras por su capacidad. La carga de sus armaduras, que es igual para todos ellos, es igual a la capacidad del condensador equivalente multiplicada por la diferencia de potencial entre las armaduras extremas.

Ejemplo: Tenemos en serie dos condensadores de capacidades C_1 y C_2; la diferencia de potencial entre sus armaduras extremas es $V_1 - V_3$. La carga de cada condensador es igual a $C(V_1 - V_3)$, siendo

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} \qquad C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \qquad Q = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_3)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{C_1} = \frac{\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_3)}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_3)$$

$$V_2 - V_3 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(V_1 - V_3)$$

Si los condensadores fuesen iguales, la capacidad del condensador equivalente vale: $C = \frac{C_1}{n}$, y la diferencia de potencial entre las armaduras de cada uno de ellos sería:

$$V_M - V_N = \frac{Q}{C} = \frac{C_1 (V_A - V_B)}{n C_1} \qquad V_M - V_N = \frac{V_A - V_B}{n}$$

La energía de cada uno de los condensadores (considerando los de la fig. 19) vale:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} \\ U_2 &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} \\ U_3 &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_3} \end{aligned}\right\} \text{ la total: } U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \text{siendo} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

que es la misma que la del condensador equivalente.

Asociación mixta es cuando se conectan condensadores en paralelo y el conjunto en serie con otro u otros condensadores (fig. 20). Para determinar

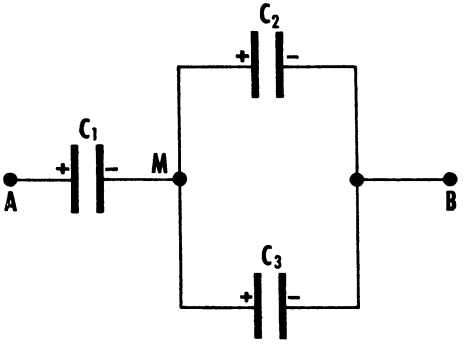


FIG. 20

la capacidad equivalente del sistema de condensadores, se halla la capacidad equivalente de los que están en paralelo, sumando sus capacidades; luego se halla la capacidad de los que están en serie, según la fórmula

$$\frac{1}{C} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

En la figura tenemos que la capacidad del condensador equivalente a los que están en derivación igual a $C_2 + C_3$; ahora tenemos en serie el C_1 y el equivalente de los C_2 y C_3. La capacidad del condensador equivalente de éstos en serie la calculamos por la fórmula

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1 (C_2 + C_3)}$$

$$C = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

La energía almacenada por estos condensadores vale la suma de las energías de cada uno de ellos.

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} Q^2 \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2} \right] = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Problema: Las capacidades de los condensadores de la fig. 20 valen: $C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$. La diferencia de potencial, $V_A - V_B = 600$ V. Hallar la capacidad del condensador equivalente, la carga y la energía de cada uno de ellos.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{(4+2) \cdot 10^{-6}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) 10^6 = \frac{1}{2} \cdot 10^6; \qquad C = \frac{2}{10^6}\ \text{F} = 2\ \mu\text{F}$$

$$Q = C\,(V_A - V_B) = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 600 = 12 \cdot 10^{-4}\ \text{culombios}$$

$$Q_1 = Q = 12 \cdot 10^{-4}\ \text{culombios}$$

$$Q_2 = C_2\,(V_M - V_B) = C_2 \frac{Q}{C_2 + C_3} = 4 \cdot 10^{-6} \frac{12 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^{-4}\ \text{culombios}$$

$$Q_3 = C_3\,(V_M - V_B) = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{culombios}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{12^2 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^{-6}} = 0{,}24\ \text{julios}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{8^2 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 10^{-6}} = 0{,}08\ \text{julios}$$

$$U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q_3^2}{C_3} = \frac{1}{2}\frac{4^2 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}04\ \text{julios}$$

PRÁCTICAS

Experimentos de anulación del campo eléctrico de un condensador.— Podemos construir un condensador, tomando dos láminas o discos metálicos, fijándoles a un soporte aislante (porcelana, plástico, etc. Preferiblemente el contacto armadura-soporte con un trozo de ámbar) y colocándolos a corta distancia paralelos entre sí.

Cargamos el condensador con una máquina electrostática o con un breve contacto con la red eléctrica de corriente continua o bien rectificando corriente alterna. Conectamos el condensador a un electroscopio (citado en teoría); una vez cargado veremos que las láminas del electroscopio divergen. Mientras el condensador esté cargado, las láminas del electroscopio mantienen su divergencia, si el condensador se descarga la divergencia disminuye hasta que, cuando el condensador está completamente descargado, las láminas del electroscopio quedan unidas. El campo eléctrico de un condensador cargado es proporcional a la carga. Si las cargas disminuyen el campo eléctrico también disminuye y se anula cuando el condensador está descargado. De aquí deducimos que podemos comprobar la anulación del campo eléctrico en un condensador por medio del electroscopio.

Para experimentar acerca de la anulación del campo eléctrico podemos disminuir la carga de las armaduras, uniendo éstas por medio de un cuerpo cualquiera. Las cargas pasan a través del cuerpo de una armadura a la otra hasta que se neutralizan. El tiempo que tarde en anularse el campo eléctrico depende del cuerpo a través del cual se desplazan las cargas. Si es un alambre metálico la anulación es instantánea, si es un hilo de algodón tarda más tiempo. En general, tardará más o menos tiempo, pero a la larga se anulará aunque sea un cuerpo mal conductor. Existe otro fenómeno que nos anula el campo eléctrico aunque no unamos las armaduras. Este fenómeno es la *ionización del aire*. Entre las armaduras existe aire que es un dieléctrico, pero por

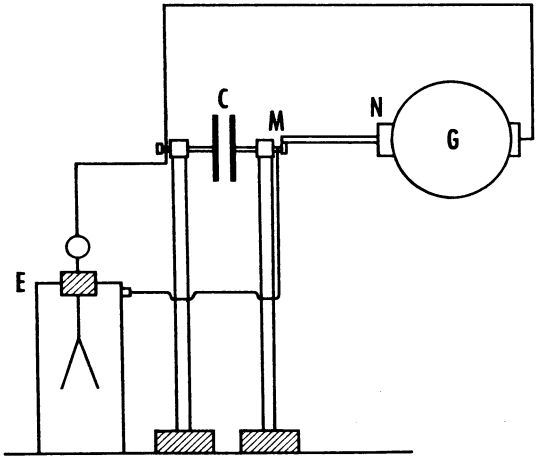


FIG. 21

agentes ionizantes, radiactividad, rayos cósmicos o fenómenos de incandescencia, harán que se descargue el condensador. Podemos realizar el siguiente experimento: Con el condensador conectado al electroscopio, y cargado, acercamos una llama o un metal incandescente colocándole entre las armaduras en su parte inferior; veremos cómo las láminas del electroscopio convergen indicándonos que se va anulando el campo eléctrico entre las armaduras. El cuerpo incandescente o la llama han ionizado parcialmente el aire y estos iones se mueven en la dirección del campo, los positivos en el mismo sentido van a neutralizar a las cargas negativas y los electrones en sentido contrario van a neutralizar a las cargas positivas de la armadura correspondiente.

Para comprobar que pasan cargas al unir las armaduras, con un hilo podemos conectar un galvanómetro G (véase capítulo XIX) en serie con el hilo *MN* (figura 21). Al unir el extremo *M* del hilo a la armadura veremos cómo el galvanómetro se desvía indicándonos el paso de cargas. Si el hilo con el que conectamos las armaduras es aislante la desviación del galvanómetro es muy pequeña, pero dura bastante rato hasta que se ha anulado el campo eléctrico entre las armaduras (lo cual comprobamos con el electroscopio *E*). Podemos experimentar con hilos metálicos, de seda, algodón, goma, madera, etc. Veremos que en cada caso la desviación y la duración es distinta. También observaremos que para un mismo cuerpo depende de la humedad. Por ejemplo, la descarga es más rápida para un hilo de algodón húmedo que si está seco.

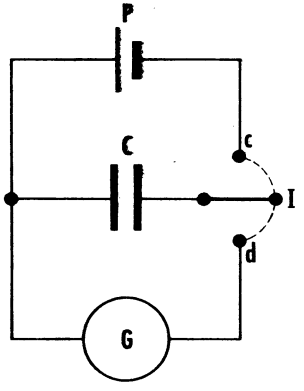


FIG. 22

De lo anterior, deducimos que los experimentos electrostáticos son perturbados por la humedad que hace que los cuerpos, incluso los aislantes, sean algo conductores y nos descargan los condensadores. En general, los cuerpos cargados pierden sus cargas por la conducción de éstas a través de lo que considerábamos aislantes que por efecto de la humedad no lo son totalmente.

Si no se dispone de un galvanómetro suficientemente sensible pueden hacerse los experimentos con un condensador de mayor capacidad (como los que se venden en el comercio de varios microfaradios) o también podemos conectar varios en paralelo para aumentar la capacidad del conjunto y así para una misma diferencia de potencial las cargas del condensador son mayores.

Con un condensador de gran capacidad cargado estableciendo entre sus armaduras una diferencia de potencial bastante grande, podemos comprobar su descarga conectando una pequeña bombilla entre sus armaduras. La bombilla lucirá intensamente durante muy breve tiempo por efecto del paso de las cargas durante este pequeño intervalo.

Calibrado de un galvanómetro balístico. — En el capítulo XIX estudiaremos el galvanómetro balístico; de momento basta saber que se desvía por el paso de cargas eléctricas. Si el paso es muy rápido, la desviación máxima del galvanómetro es proporcional a la carga total que ha circulado por él.

Para calibrar un galvanómetro balístico efectuaremos el montaje indicado en la figura 22. La pila P tiene una fuerza electromotriz conocida $\mathcal{E}$, la capacidad del condensador es C. El interruptor I nos permite conectar el condensador a la pila para su carga (posición c) y luego descargar el condensador a través del galvanómetro (posición d). Este interruptor tiene la ventaja de que no conectaremos nunca la pila directamente al galvanómetro, lo cual inutilizaría el aparato si no tiene una protección adecuada.

La carga del condensador, después de conectarlo a la pila, es $Q = c\,\mathcal{E}$ (ya que $\mathcal{E}$ es la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador). Descargando el condensador, colocado el interruptor en la posición d, el galvanómetro se desvía. Tomando nota de la desviación máxima, puede repetirse varias veces y tomar el promedio de las desviaciones máximas. Sustituimos el condensador por otro de capacidad también conocida C'. Cargamos y descargamos como antes y tendremos la desviación correspondiente a la carga $Q' = C'E$. Repetimos colocando los condensadores en paralelo y luego en serie y tendremos las desviaciones correspondientes a las cargas

$$Q'' = (C + C')\,\mathcal{E} \quad \text{y} \quad Q''' = \frac{C\,C'}{C + C'}\,\mathcal{E} \quad \text{respectivamente}$$

Podemos tomar un tercer condensador, repetir la carga y descarga, luego colocarlo en paralelo con los anteriores y así vamos obteniendo las correspondientes desviaciones a las cargas que han circulado en cada caso.

Representamos gráficamente las desviaciones máximas en función de las cargas; así obtenemos la curva del calibrado del galvanómetro balístico, que aproximadamente será una recta.

Puede hacerse el calibrado con un solo condensador y variar la diferencia de potencial entre sus armaduras, colocando pilas en serie, o con un potenciómetro, midiendo la diferencia de potencial en cada caso.

Experimentos sobre influencia eléctrica. — Al estudiar la influencia eléctrica hemos citado el cilindro de Faraday que nos servía para estudiar los fenómenos de influencia eléctrica. Se pueden efectuar las experiencias citadas entonces. Podemos comprobar el fenómeno de la influencia con un electroscopio. Acercando un cuerpo cargado a la bola del electroscopio observaremos que las láminas divergen sin que el cuerpo toque a la bola. Esto es debido a que el cuerpo cargado ha hecho aparecer cargas por influencia en la bola, de signo contrario a las suyas y cargas del mismo signo en las láminas, por esto éstas divergen. Si rodeamos el electroscopio con un cuerpo conductor, aunque acerquemos un cuerpo cargado, las láminas no divergen, las cargas inducidas sobre el cuerpo interpuesto lo son en su superficie mientras en su interior el campo

es nulo y por esto no se manifiestan los fenómenos de influencia. A este cuerpo se le llama *pantalla eléctrica*. No es necesario que sea un cuerpo compacto, basta con una tela metálica bastante tupida para que no observemos influencia sobre el electroscopio. Esto constituye una jaula de Faraday.

Pueden ponerse de manifiesto los fenómenos de influencia, materializando las líneas de fuerza en modelo bidimensional, como el descrito en el capítulo anterior. De los dos trozos de papel de estaño cargamos sólo uno. Después de espolvorear con polvo de yeso veremos las líneas de fuerza que van del disco cargado a la zona del influenciado con cargas negativas y líneas de fuerza que parten de la zona donde están las cargas positivas hacia el infinito.

Podemos poner de manifiesto el efecto de pantalla eléctrica, colocando entre dos discos un aro. Cargando los dos discos con cargas de signos contrarios veremos las líneas de fuerza que parten del positivo hacia la superficie próxima del aro y otras de la superficie extrema del aro hacia el cargado negativamente, pero dentro del aro el polvo de yeso está desordenado, no existe campo orientador.

Podemos hacer el siguiente experimento:

Tomemos una varilla metálica aislada y coloquemos uno de sus extremos próximos a un cuerpo cargado. Con un péndulo eléctrico comprobaremos la aparición de cargas inducidas. Si la bola del péndulo está cargada por contacto con el cuerpo cargado, al aproximar al extremo de la varilla más distante del cuerpo notaremos una repulsión y aproximando al extremo cercano una atracción. Esto comprueba que la parte lejana está cargada con cargas del mismo signo que las del cuerpo inductor y la parte próxima de signo contrario.

Aproximando el péndulo eléctrico con la bola en estado neutro a un cuerpo cargado el cuerpo atrae a la bola. Han aparecido cargas inducidas, en la parte próxima al cuerpo cargado, de signo contrario y esto explica la atracción.

Comparación de capacidades con el galvanómetro balístico.—Para comparar la capacidad de dos condensadores utilizaremos el montaje de la figura 22. Sea C la capacidad de un condensador y C' la capacidad del otro. Conectamos el condensador cuya capacidad es C tal como se indica en el esquema de la citada figura. Cargamos el condensador con la pila P de fuerza electromotriz $\mathcal{E}$, colocando el interruptor I en la posición c, y lo descargaremos a través del galvanómetro balístico colocando el interruptor en la posición d. Tomamos nota de la desviación máxima del galvanómetro. Podemos repetir varias veces y hallar el promedio de las desviaciones máximas. Repetimos la operación conectando el condensador, cuya capacidad es C'.

La desviación máxima es proporcional a la carga total que ha circulado a través del galvanómetro.

En el primer caso: $\alpha = k\,Q = k\,C\,\mathcal{E}$ llamando α a la desviación.

En el segundo caso: $\alpha' = k\,Q' = k\,C'\,\mathcal{E}$ dividiendo miembro a miembro.

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{C}{C'}$$

de donde: $C' = \frac{\alpha}{\alpha'} C$; si conocemos la capacidad C podemos determinar la capacidad de C'.

Por este método podemos conocer las capacidades utilizadas en la práctica anterior del calibrado del galvanómetro balístico, si es que sólo conocíamos la capacidad C.

CUESTIONES

1. *¿Por qué un cuerpo cargado atrae a un ligero conductor en estado neutro?*

2. *¿Cómo podemos cargar negativamente un conductor sin comunicarle cargas?*

3. *¿Cómo podríamos comparar las cargas eléctricas de dos cuerpos mediante el cilindro de Faraday y un electroscopio?*

4. *Dos conductores inicialmente en estado neutro se colocan a distintas distancias de una esfera conductora cargada. ¿En cuál de ellos la densidad superficial de cargas inducidas es mayor?*

5. *Cítense conductores en presencia entre los cuales exista influencia total.*

6. *¿Por qué un cuerpo cargado atrae a pequeños trozos de papel que estaban en estado neutro?*

7. *Cuélguese un lapicero mediante un hilo por su parte central. Acercando a uno de sus extremos un objeto de plástico, después de haberlo frotado con un trapo de lana, observemos que el lapicero gira. Sustituimos el lapicero por una varilla metálica y observamos el mismo fenómeno. Explíquese dicho fenómeno en cada caso.*

8. *Tomemos dos láminas metálicas paralelas cargadas. Si el valor del campo eléctrico supera cierto valor, salta una chispa. Debido a este hecho queda limitada la diferencia de potencial que podamos aplicar entre las armaduras de un condensador. Explíquese el por qué.*

9. *Dado un condensador plano, ¿cómo podemos aumentar su capacidad?*

10. *Disponemos de cuatro condensadores de la misma capacidad, ¿cómo debemos asociarlos para obtener una capacidad máxima o mínima?*

11. *¿Qué ventajas tiene la conexión en serie de varios condensadores en lo que respecta a lo expuesto en la cuestión 8?*

12. *Deducir la fórmula que nos da la capacidad del condensador equivalente a la asociación en serie o en paralelo, a partir de la igualdad de la energía del condensador equivalente a la suma de las energías de los condensadores asociados.*

PROBLEMAS

1. Tenemos una esfera conductora cargada con 0,0002 culombios. Otra esfera hueca concéntrica a la anterior la rodea completamente. Si la esfera hueca estaba en estado neutro y su radio interno es de 60 cm, hallar la densidad superficial de las cargas inducidas en su parte interna.

2. Entre las armaduras de un condensador plano existe un campo eléctrico cuya intensidad en el vacío es de 6000 V/m. Colocamos un dieléctrico entre las placas y el campo dentro del dieléctrico tiene una intensidad de 1500 V/m. Determinar la constante dieléctrica relativa del dieléctrico y la densidad superficial de las cargas de polarización.

3. Formamos un condensador plano con dos tiras de papel de estaño de 8 m de longitud y 5 cm de ancho. Separamos dichas tiras con papel parafinado de espesor 0,5 mm. La constante dieléctrica relativa del papel parafinado utilizado es igual a 2. Hallar la capacidad del condensador.

4. Dos láminas metálicas paralelas de 50 dm^2 de superficie están separadas por una lámina de mica de constante dieléctrica relativa igual a 6. Cargamos el condensador, siendo la diferencia de potencial entre las armaduras de 220 voltios. Determinar la carga del condensador y la intensidad del campo eléctrico entre las armaduras. Retiramos el dieléctrico. Determinar el nuevo valor de la diferencia de potencial entre las armaduras y de la intensidad del campo eléctrico entre ellas. La separación de las láminas 1 mm.

5. Tenemos un condensador de 0,1 μF de capacidad. La diferencia de potencial entre sus armaduras es de 500 voltios. Conectamos sus armaduras con un hilo poco conductor a través de un galvanómetro Determinar la diferencia de potencial entre las armaduras cuando las cargas que han circulado por el galvanómetro son de $2 \cdot 10^{-5}$ culombios.

6. Colocamos tres láminas metálicas paralelas equidistantes entre ellas 2 mm. La superficie de cada lámina es de 0,8 m^2. Estableciendo una diferencia de potencial de 3000 voltios entre las láminas extremas, hallar las cargas del sistema de condensadores formado.

7. Dos condensadores de 0,4 y 0,6 microfaradios de capacidad respectivamente se conectan en serie. Entre las armaduras extremas se establece una diferencia de potencial de 200 voltios. Hallar la capacidad del condensador equivalente. La carga de cada uno de ellos, la diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador y la energía almacenada.

8. El mismo problema anterior considerando que los condensadores los hemos conectado en paralelo.

9. Tenemos cuatro condensadores de la misma capacidad, 4 μF. Calcular las capacidades que obtendremos asociando dichos condensadores de maneras distintas.

10. La capacidad de dos condensadores conectados en paralelo es cuatro veces mayor que la de los mismos asociados en serie. Determinar la relación entre las capacidades de los citados condensadores.

11. Disponemos de cuatro condensadores, asociamos el primero de 12 μF en serie con los demás conectados en paralelo. Las capacidades de los tres restantes son: 4, 6 y 8 μF. Establecemos en los extremos de la serie una diferencia de potencial de 600 voltios. Hallar la carga de cada uno de los condensadores y la energía almacenada.

12. Tenemos 25 condensadores de 4 μF cada uno. Los asociamos en series de cinco condensadores y cada serie en paralelo con las otras. Determinar la capacidad total del sistema. Aplicando a los extremos de las derivaciones una diferencia de potencial de 600 voltios, hallar la carga de cada condensador, la diferencia de potencial entre sus armaduras y la energía almacenada por cada uno de ellos, así como la total

CAPÍTULO XVI

CORRIENTE ELÉCTRICA CONSTANTE

Mecanismo íntimo de la corriente eléctrica en un conductor metálico. — La mayoría de los metales poseen estructura cristalina, es decir, consisten en una distribución de átomos o moléculas dispuestos en tres dimensiones, repitiendo regularmente un modelo simple. Los átomos ocupan los nudos de la red cristalina, dichos átomos constan de un núcleo central rodeado de electrones de los cuales unos están *ligados* al núcleo por la atracción de éste que los mantiene en sus inmediaciones. Otros por estar situados a distancias poco diferentes de dos núcleos distintos, no los podemos asociar a ninguno de los dos; estos electrones son los electrones *libres* que pueden moverse por entre la red cristalina de una forma desordenada. Por analogía con el movimiento de las moléculas de un gas, se dice que estos electrones constituyen el *gas electrónico*. El número de electrones libres por átomo, que depende del tipo de metal, es como mínimo uno, algunas veces dos y aun tres electrones por átomo, y se mueven bajo la acción de cualquier campo eléctrico que hayamos creado en el metal.

Aplicando una diferencia de potencial en los extremos de un conductor metálico habremos creado un campo eléctrico, los electrones se moverán en la dirección del campo, pero en sentido contrario (en este caso el $\vec{E}$ no es nulo porque el conductor no está en equilibrio eléctrico). El paso de estas cargas eléctricas (electrones) da lugar a una corriente eléctrica. Si la diferencia de potencial se mantiene constante tendremos un paso continuo de cargas y esto origina una corriente eléctrica continua y constante.

Intensidad de la corriente. — Se llama intensidad de la corriente a la carga eléctrica que ha pasado por una sección transversal del conductor, dividido por el intervalo de tiempo transcurrido durante el paso de dicha carga. Escribiremos:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t};$$

si el flujo de cargas no fuese constante tomaríamos un intervalo de tiempo tendente a cero y definiríamos en cada instante la intensidad instantánea como

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \text{o sea} \qquad i = \frac{dQ}{dt}$$

la unidad de intensidad de la corriente es el *amperio*, que es la intensidad de una corriente eléctrica tal que en un segundo ha pasado la carga de un culombio por la sección transversal del conductor.

Escribiremos:

$$1\ \text{A} = \frac{1\ \text{culombio}}{1\ \text{segundo}}$$

Las dimensiones de la intensidad son: $[I] = \frac{Q}{T} = T^{-1}\,Q.$

Consideremos la corriente producida por el paso de electrones (fig. 23). Sea la e la carga del electrón, n el número de electrones libres por unidad de volumen, S la sección recta del conductor Suponiendo que los electro-

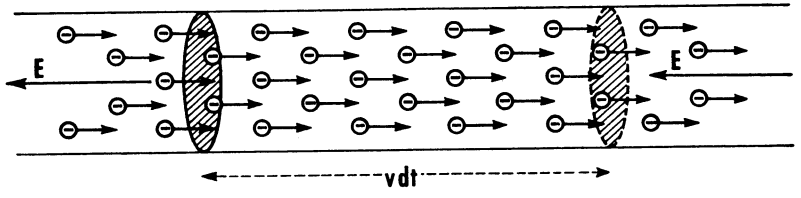


FIG. 23

nes poseen una velocidad media constante v, el número de cargas que pasan a través de S en un intervalo de tiempo dt, es igual al número de cargas contenidas en un cilindro de base S y altura vdt, que será igual al volumen del cilindro por el número de cargas por unidad de volumen; por lo tanto, la carga total dQ que ha pasado a través de S en el intervalo de tiempo dt es $dQ = neSvdt$. La intensidad de la corriente será, pues,

$$I = \frac{dQ}{dt} = neSv.$$

A la relación $\frac{I}{S}$ se le llama densidad de corriente, $\frac{I}{S} = nev$.

El sentido de la corriente es el del movimiento de los electrones, si bien siguiendo la costumbre clásica tomaremos como el sentido de la corriente el contrario al de los electrones, es decir, la corriente es como si circulasen cargas positivas de los puntos de mayor potencial a los de menor potencial.

Deducción de la ley de Ohm para un hilo conductor. — Antes hemos supuesto que la velocidad media de los electrones era constante. Por acción del campo eléctrico los electrones se aceleran, pues

$$F = eE, \quad a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m};$$

estos electrones al moverse chocan con los iones de la red cristalina y cambian de trayectoria momentáneamente, ya que al ser de nuevo acelerados por la fuerza debida al campo eléctrico continúan otra vez en la dirección del campo hasta chocar de nuevo con otro ion. Estos choques producen un enfrenamiento de los electrones, sin el cual su movimiento sería uniformemente acelerado. Pueden considerarse los sucesivos choques como un «*rozamiento*» que se opone al movimiento. Al aumentar la velocidad aumenta el número de choques, y por tanto el enfrenamiento, de aquí podemos suponer que la fuerza, que por término medio se opone al movimiento es proporcional a la velocidad $F = Kv$ (en donde K es un coeficiente de proporcionalidad que depende de cada metal). Experimentalmente puede comprobarse que el movimiento medio de los electrones es uniforme, de aquí deducimos que la aceleración debe ser nula y, por tanto, que la fuerza Kv que se opone al movimiento es igual (en módulo) a la debida al campo eléctrico, y así escribimos:

$$eE = Kv, \qquad v = \frac{eE}{K}.$$

Sustituyendo el valor de v despejado de esta fórmula en la expresión que nos da la intensidad de la corriente, obtenemos:

$$I = neS\frac{eE}{K} = \frac{ne^2 SE}{K}.$$

Consideremos un hilo conductor de longitud l; al aplicarle en sus extremos una diferencia de potencial $V_1 - V_2$, tendremos un campo eléctrico cuya intensidad vale $E = \dfrac{V_1 - V_2}{l}$ (considerado conductor homogéneo).

La intensidad de la corriente vale

$$I = \frac{ne^2 S}{K}\,\frac{V_1 - V_2}{l} = \frac{V_1 - V_2}{\dfrac{K}{ne^2}\,\dfrac{l}{S}}$$

llamando a $\dfrac{K}{ne^2} = \rho$, $\quad I = \dfrac{V_1 - V_2}{\rho\dfrac{l}{S}} = \dfrac{V_1 - V_2}{R}$, siendo $\quad R = \rho\dfrac{l}{S}$.

De aquí deducimos que la relación entre la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor y la intensidad que circula es una cantidad constante para cada conductor. Esta cantidad constante R recibe el nombre de resistencia de la porción de conductor considerada. A la expresión anterior se le llama ley de Ohm, descubierta experimentalmente por el físico alemán G. S. Ohm.

Resistencia y resistividad. — La relación $\frac{V_1 - V_2}{I} = R$, llamada resistencia eléctrica R, tiene las dimensiones

$$[R] = \frac{[V]}{[I]} = \frac{ML^2 T^{-2} Q^{-1}}{T^{-1} Q} = ML^2 T^{-1} Q^{-2}$$

y se mide en ohmios (Ω); diremos que la resistencia de un conductor es de 1 *ohmio* cuando al aplicarle entre sus extremos una diferencia de potencial de 1 voltio la corriente que circula es de 1 amperio.

En la deducción de la ley de Ohm hemos llamado R a $\rho \frac{l}{S}$, a $\rho = \frac{K}{ne^2}$ se le llama *resistividad* del conductor Sus dimensiones son:

$$[\rho] = \frac{[R]\, L^2}{L} = [R] \cdot L = ML^3 T^{-1} Q^{-2}$$

en el sistema MKSC se mide $\Omega \cdot m$.

Al recíproco de R, $\frac{1}{R}$ se le llama conductancia y se mide en *mho* (Ω recíproco). Al recíproco de la resistividad se le llama *conductividad* y se mide en $\frac{1}{\Omega \cdot m} = \frac{\text{mho}}{m}$.

El valor de la resistividad varía de unos cuerpos a otros. A continuación damos el valor de la resistividad de algunas sustancias:

Sustancias	*Resistividad en* $\Omega \cdot m$	*Coeficiente de temperatura* $(0°C)^{-1}$
Aluminio	$2{,}83 \cdot 10^{-8}$	0.0039
Constantán	$49{,}0 \cdot 10^{-8}$	0,00001
Cobre	$1{,}72 \cdot 10^{-8}$	0,00393
Carbón	$3500 \cdot 10^{-8}$	0.0005
Hierro	$10 \cdot 10^{-8}$	0,005
Plomo	$22 \cdot 10^{-8}$	0,0043
Manganina	$44 \cdot 10^{-8}$	0,00001
Mercurio	$95{,}8 \cdot 10^{-8}$	0,00089
Nicrom	$100 \cdot 10^{-8}$	0,0004
Níquel	$7{,}8 \cdot 10^{-8}$	0,006
Plata	$1{,}59 \cdot 10^{-8}$	0,0038
Platino	$10 \cdot 10^{-8}$	0,003
Estaño	$11{,}5 \cdot 10^{-8}$	0,0042
Tungsteno	$5{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,0045

La resistividad varía con la temperatura. En los metales la ley de variación es aproximadamente $\rho = \rho_0 (1 + \gamma t)$, siendo la constante γ positiva para los metales, cuyo valor damos en la tabla anterior para algunas sustancias. La resistividad puede variar en ciertos conductores por efecto de la luz y también en algunos (Ni, Bi, etc.) por efecto del campo magnético.

Deducción de la ley de Joule. — Experimentalmente encontró Joule que el paso de una corriente eléctrica producía un desprendimiento de calor en un conductor recorrido por dicha corriente. Para determinar la cantidad de calor desprendida debemos tener en cuenta la conversión de trabajo en calor. Para trasladar una carga eléctrica Q de un punto a otro, entre los cuales existe una diferencia de potencia $V_1 - V_2$, el trabajo efectuado por el campo eléctrico es igual al producto de la carga por la diferencia de potencial $\mathfrak{T} = Q (V_1 - V_2)$, trabajo que se convierte en energía cinética de la carga Q al ser ésta acelerada por el campo. En el caso de la corriente eléctrica por ser $Q = It$, $\mathfrak{T} = (V_1 - V_2) It$.

Hemos indicado anteriormente que el paso de electrones se efectúa a velocidad media constante, por existir una fuerza de enfrenamiento a causa de los choques, que anula la fuerza debida al campo eléctrico y evita la aceleración uniforme de los electrones. Como consecuencia de los choques, los electrones pierden la energía cinética que les había comunicado el campo durante el intervalo comprendido entre dos colisiones, la cual se transforma en calor.

El hecho de continuar el movimiento a velocidad constante, si no existe ninguna otra pérdida de energía (mecánica, química, etc.), indica que el trabajo del campo eléctrico se ha transformado íntegramente en calor. Este trabajo vale, según hemos visto antes $(V_1 - V_2) It$; el calor desprendido será igual (teniendo presente entonces la equivalencia julio-caloría) a $0{,}24 (V_1 - V_2) It$. Esta expresión puede escribirse recordando la ley de Ohm $V_1 - V_2 = IR$; cantidad de calor $= 0{,}24\, I^2 Rt$, o bien

$$= 0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \cdot t.$$

Cualquiera de estas fórmulas nos expresa la ley de Joule. Podemos enunciarla del siguiente modo:

En un conductor que tiene una determinada resistencia, la cantidad de calor desprendida es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente que circula, directamente proporcional a la resistencia y al tiempo durante el cual circula la citada corriente.

Son bien conocidas las aplicaciones del efecto Joule a la calefacción eléctrica, horno eléctrico, iluminación, fusibles, amperímetros térmicos (que veremos en el cap. XIX), etc. Al lado de estas aplicaciones debemos citar que el efecto Joule es un inconveniente en las instalaciones eléctricas, ya que los hilos que conducen la corriente sufren un calentamiento dependiente de la intensidad y esto representa una pérdida de energía.

La potencia de la corriente eléctrica

$$p = \frac{\mathcal{E}}{t} = (V_1 - V_2)\, I = I^2 R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}$$

se mide en vatios. Una resistencia R, al ser recorrida por una corriente disipa una potencia $I^2 R$.

El trabajo de una corriente eléctrica $= (V_1 - V_2)\, It$ se mide en julios. pero en la práctica se acostumbra a medir en kilovatios-hora (kWh), siendo su equivalencia en julios: 1 kWh $= 1000$ W $\cdot 3600$ seg $= 3{,}6 \cdot 10^6$ julios.

Problema: Un termos de 10 litros de capacidad posee una resistencia de 19,53 Ω. Llenando dicho termos con agua a 12°C determinar el tiempo transcurrido para que la temperatura del agua sea de 42°C si se establece entre los extremos de la citada resistencia una diferencia de potencial de 125 voltios. ¿Cuál será el importe de la energía eléctrica consumida si se paga el kWh a 2,75 ptas.? (Se suponen pérdidas de calor despreciables.)

$Q = 0{,}24\ I^2 R\, t$ $\qquad Q = 10\,000\,(42 - 12) = 300\,000$ calorías

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{125}{19{,}53}$$

$$300\,000 = 0{,}24\ \frac{125^2}{19.53^2}\ 19{,}53 \cdot t$$

$$t = \frac{300\,000}{0{,}24 \cdot \dfrac{125^2}{19.53}} = 1558{,}2 \text{ seg} = 26^{\text{m}}\ 58{,}2^{\text{s}}$$

$$300\,000 \text{ calorías} = 4{,}18 \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ julios} = \frac{4{,}18 \cdot 3 \cdot 10^5}{3{,}6 \cdot 10^6} \text{ kWh} = 0{,}348 \text{ kWh}$$

Importe: $0{,}348 \cdot 2{,}75 = 1{,}305$ ptas.

PRÁCTICAS

Estudio experimental de un cazo eléctrico. Rendimiento del aparato. — Tomemos un cazo eléctrico y llenémoslo parcialmente de agua (puede llenarse las $^4/_5$ partes de su capacidad). Pesamos el cazo antes y después de verter el agua, con lo cual determinamos la masa de agua introducida. Por medio de un soporte suspendemos un termómetro, el cual introduciremos en el agua de forma que no toque en las paredes ni en el fondo. Con un agitador removeremos el agua y luego leemos la temperatura inicial del agua. Disponiendo de un cronómetro o un reloj ordinario determinaremos el tiempo transcurrido desde que conectamos el cazo hasta el final de la operación. Montaremos en serie con el cazo un amperímetro y un reóstato, y en derivación un voltímetro (fig. 24).

Una vez leída la temperatura inicial conectamos el cazo a la red de suministro eléctrico, simultáneamente ponemos en marcha el cronómetro. Agitaremos el agua continuamente. Anotamos el valor de la intensidad, lo cual nos es

indicado por el amperímetro. Transcurrido cierto tiempo, desconectamos de la red al mismo tiempo que leemos la temperatura. De esta forma podemos saber la elevación de la temperatura en un tiempo determinado en función de intensidad de la corriente. La diferencia de potencial la mantendremos constante

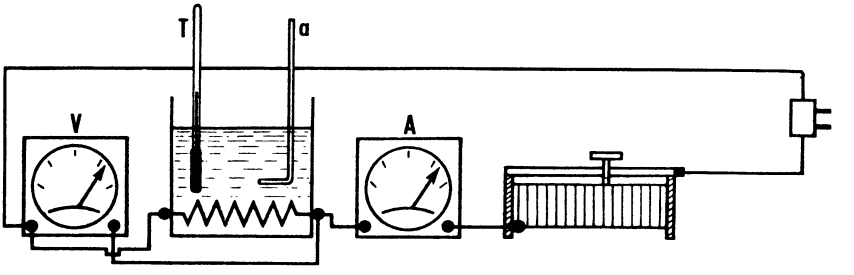


FIG. 24

durante la operación por medio del reóstato, con el cual compensaremos posibles variaciones de tensión en la red de suministro.

Variando la resistencia del reóstato lograremos que la intensidad que circula sea distinta. Repitiendo la misma operación anterior observaremos que en el mismo intervalo de tiempo la elevación de temperatura es mayor o menor según que hayamos aumentado o disminuido la intensidad.

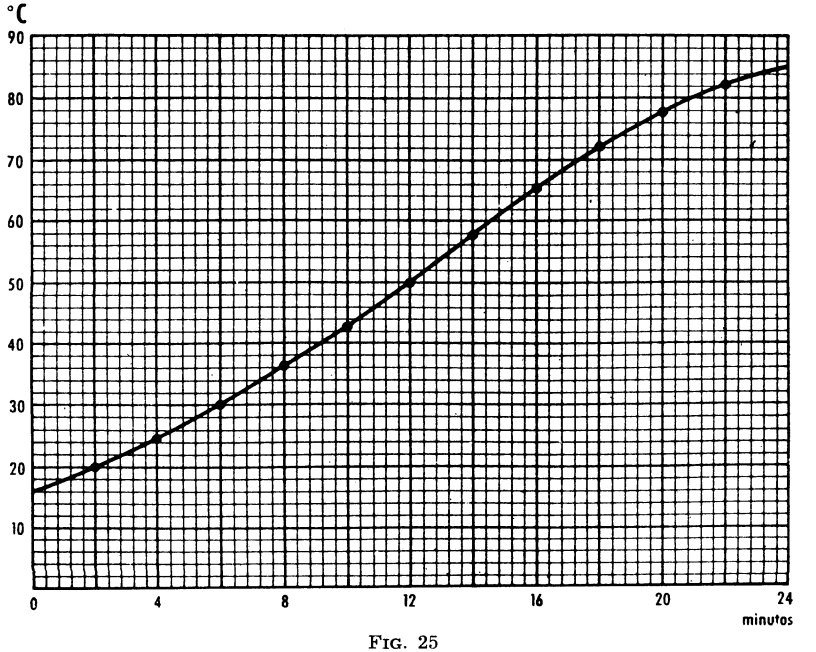


FIG. 25

Manteniendo siempre constante la intensidad (basta que mantengamos constante la diferencia de potencial con el reóstato) iremos leyendo las temperaturas en intervalos regulares de tiempo. Representaremos gráficamente las temperaturas en función del tiempo, con lo cual tendremos la gráfica del calentamiento del agua del cazo, la curva empieza como una parábola, luego sigue recta y si la temperatura se acerca a la de ebullición la gráfica se encorva de forma que con un intervalo de tiempo igual al precedente la elevación de temperatura es menor. Esto es debido a las pérdidas de calor por evaporación, las cuales se patentizan más al ser la temperatura próxima a la de ebullición. El tramo curvo del principio de la gráfica se debe a que parte del calor desprendido en la resistencia se emplea en calentar la parte metálica del cazo. En la figura 25 tenemos dibujada una gráfica de este experimento.

Podemos experimentar las pérdidas por evaporación colocando el cazo en una balanza y pesando antes y después del experimento. Según la pérdida de masa será tanto más acusada la curvatura del tramo final de la gráfica.

RENDIMIENTO DEL APARATO. — Para determinar el rendimiento de un cazo eléctrico determinaremos la energía consumida que es igual a $(V_1 - V_2)\, I\, t$ y la cantidad de calor desarrollada que vale el producto de la masa m del agua por la elevación de temperatura $T_2 - T_1$ en el intervalo de tiempo t durante

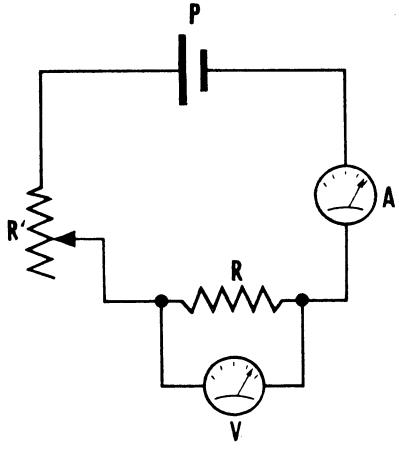


FIG. 26

el cual el cazo ha estado conectado. Expresaremos el trabajo en calorías y el rendimiento será el calor útil dividido por el calor total.

$$\gamma = \frac{m\,(T_2 - T_1)}{0{,}24\,(V_1 - V_2)\, I\, t}$$

Éste es el rendimiento medio del cazo en el intervalo de temperaturas considerado. Podemos hallar el rendimiento en distintos intervalos de temperatura y veremos que en la zona recta de la gráfica anteriormente indicada el

rendimiento es sensiblemente constante, para luego disminuir, al considerar un intervalo de temperaturas en la zona donde la gráfica se encorva.

Comprobación de la ley de Ohm. — Tomemos una pila P, una resistencia R, efectuando el montaje indicado en la figura 26. Con el reóstato R' variamos la diferencia de potencial en los extremos de la resistencia R. Con el amperímetro A leemos la indicación de la intensidad, y con el voltímetro V leemos la diferencia de potencial en los extremos de la resistencia.* Vamos anotando los valores de $V_1 - V_2$ y los de I en cada caso. El cociente $\frac{V_1 - V_2}{I}$ permanece constante y es igual a la resistencia R.

Sustituimos la resistencia R por otra R_1, operamos igual que antes y veremos que el cociente $\frac{V_1 - V_2}{I}$ en este caso (distinto al anterior) será constante e igual a R_1.

Experiencias con el contador eléctrico. — El contador eléctrico nos mide el trabajo de la corriente eléctrica o mejor la energía eléctrica consumida. En el mismo contador leemos la indicación del consumo expresado en kWh. El contador lleva indicada su constante que representa el número de revoluciones

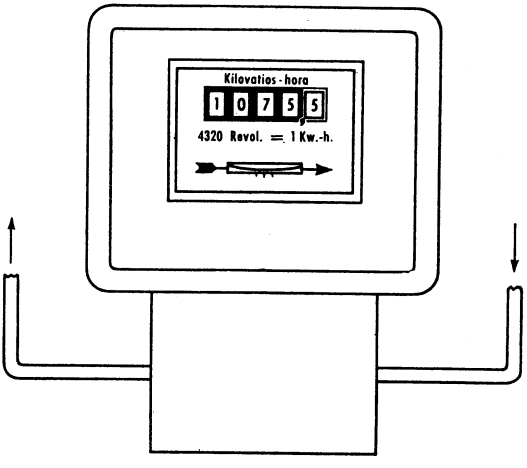


FIG 27

del disco giratorio para un consumo de 1 kWh. Por ejemplo, 4320 revoluciones = 1 kWh (fig. 27). Conectamos un aparato eléctrico cualquiera, por ejemplo una bombilla, contamos el número de vueltas del disco del contador en un tiempo determinado. Dividiendo este número de vueltas por la constante del

* La resistencia interna del voltímetro se supone muy elevada, de forma que la intensidad que por él circula es despreciable frente a la que circula por R.

contador, tenemos el consumo expresado en kWh. Hay que tener presente que no se debe conectar más aparatos eléctricos que el que estamos experimentando. Conectando otra bombilla igual a la anterior, el número de vueltas en el mismo intervalo de tiempo serán las mismas. Conectando las dos bombillas a la vez el número de vueltas en el mismo tiempo será el doble. Si el aparato o aparatos conectados consumen mucho el disco gira muy de prisa y no podremos contar las vueltas. Podemos operar del siguiente modo: leemos la indicación del contador antes de conectar el aparato; esta lectura será kWh y décimas de kWh. Conectamos el aparato durante un cierto tiempo, la lectura será distinta. La diferencia entre la última lectura y la primera nos da el consumo. Éste es el procedimiento seguido para averiguar el consumo de energía eléctrica en un tiempo determinado, consumo mensual o bimensual, etc.

El rendimiento del cazo de la práctica anterior lo podemos determinar con un contador eléctrico: Leemos antes de conectar el cazo la indicación del contador al mismo tiempo que la temperatura. Leemos la indicación al desconectar. La diferencia de lecturas es el consumo. Dividiendo el calor útil (determinado igual que en la práctica anterior) por el consumo (expresado en calorías) tenemos el rendimiento. Tengamos presente que el consumo está expresado en kWh, hay que expresarlo en julios multiplicando por $3{,}6 \cdot 10^6$, y estos julios en calorías multiplicando por 0,24.

Comprobación de la ley de Joule. — En un calorímetro colocamos cierta cantidad de agua destilada. Sumergimos un termómetro *T* y con un agitador *a* removeremos el agua. Introducimos una resistencia *R* dentro del agua y efectuamos las conexiones indicadas en la figura 28. El reóstato *R'* permite variar

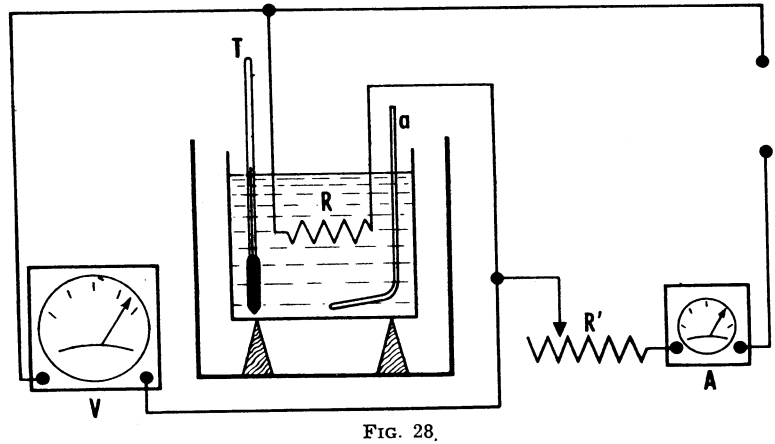


FIG. 28.

la intensidad de la corriente que pasa por *R*, la cual conoceremos leyendo su valor en el amperímetro *A*. Determinamos la elevación de temperatura, en un intervalo de tiempo fijado, para una intensidad *I*. Variemos la intensidad, sea el nuevo valor $2I$. La elevación de temperatura *a* durante el mismo intervalo de tiempo será 4 veces mayor que la anterior. Variamos la intensidad de

forma que su valor sea $\frac{1}{2}I$ la elevación de temperatura en el mismo intervalo de tiempo será $\frac{1}{4}$ de la inicial. Con esto comprobamos que la cantidad de calor es proporcional al cuadrado de la intensidad. Podemos representar gráficamente los aumentos de temperatura en función de los cuadrados de la intensidad y obtendremos una recta, como consecuencia de la citada proporcionalidad.

Mantendremos la intensidad constante y determinaremos la elevación de temperatura en intervalos regulares de tiempo. Podremos comprobar que la elevación de temperatura, y como consecuencia la cantidad de calor desprendida, es directamente proporcional al intervalo de tiempo considerado. Representando gráficamente la elevación de temperatura en función del tiempo, obtendremos una recta.

Sustituyendo la resistencia eléctrica por otras de valores distintos, las elevaciones de temperatura para una misma intensidad en intervalos de tiempo iguales son proporcionales al valor de la resistencia.

CUESTIONES

1. *Un conductor metálico al ser recorrido por una corriente, ¿pierde electrones?*

2. *¿Por qué los metales son buenos conductores de la corriente eléctrica?*

3. *¿Por qué aumenta la resistencia de un conductor al elevar su temperatura?*

4. *En los extremos de un hilo de cobre establecemos una diferencia de potencial circulando por él una corriente que lo pone incandescente. Enfriamos una porción de hilo y observamos que el resto se pone más brillante y llega a fundirse. ¿Cómo se explica este fenómeno?*

5. *Basándonos en la cuestión anterior y teniendo presente la tabla de coeficientes de γ interpretar la experiencia de que en un hornillo eléctrico, cuya resistencia fuese de manganina aunque se derrame un líquido y enfríe parte de la resistencia no llega a fundirse.*

6. *¿Qué condición debe cumplir un hilo de cobre para que cierta longitud de hilo tenga una resistencia relativamente elevada?*

7. *Entre los extremos de dos hilos de distinta naturaleza de la misma longitud y sección establecemos una diferencia de potencial la misma para los dos hilos. ¿En cuál de ellos el desprendimiento de calor es mayor?*

8. *Dos hilos de cobre tienen la misma longitud y distinta sección, aplicando entre los extremos de los dos hilos una misma diferencia de potencial, ¿en cuál de los dos el desprendimiento de calor será mayor?*

9. *Deducir la equivalencia entre la resistividad expresada en micro-ohm·cm y en ohm·m.*

10. *Si los electrones en un conductor metálico no sufriesen ningún choque, ¿cómo repercutiría esta hipótesis en la intensidad de la corriente, resistencia eléctrica y efecto Joule?*

11. *Explicar cómo podríamos comprobar un contador eléctrico, con un voltímetro, un amperímetro y un cronómetro, supuesto que sus indicaciones son correctas.*

PROBLEMAS

1. Un conductor de cobre cuya resistividad es de 1,7 microohm·cm tiene una longitud de 300 km y el diámetro de su sección es de 2 cm. Determinar su resistencia.

2. ¿Cuál debe ser la longitud de un alambre de hierro ($\rho = 10^{-7}\ \Omega \cdot m$) siendo el diámetro de su sección circular 8 mm para que su resistencia sea de 1 Ω?

3. Un conductor es recorrido por una corriente de 4 amperios. Determinar el número de electrones por segundo que atraviesan la sección transversal del conductor. (Carga del electrón: $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.)

4. El número de electrones libres por metro cúbico en cierto metal es de $8{,}5 \cdot 10^{28}$. Siendo la intensidad de la corriente que atraviesa la sección transversal, que es de 2 cm^2, de 100 amperios, calcular la velocidad media de los electrones.

5. Determinar la intensidad del campo eléctrico que producía el movimiento de los electrones del problema anterior sabiendo que la resistividad del metal es de $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ ohm·m.

6. La resistencia a 0°C de cierto conductor es de 10 Ω, y a 300°C, de 22,5 Ω. ¿Cuál es el valor medio del coeficiente de temperatura del metal considerado?

7. Estableciendo entre los extremos de una resistencia una diferencia de potencial de 124 voltios, la intensidad que circula es de 2 amperios. Suponiendo esta resistencia conectada permanentemente a la diferencia de potencial antes citada, calcular la energía eléctrica consumida en un mes y el importe de la misma si pagamos el kilovatio-hora a 2,75 ptas.

8. En un calorímetro con 500 gramos de agua a 18°C introducimos una resistencia eléctrica. La corriente que circula es de 2,5 amperios. Al cabo de una hora la temperatura es de 28°C. Suponiendo que no ha habido pérdidas de calor durante el proceso, determinar el valor de la resistencia. Si esta resistencia es un hilo de ferroníquel cuya resistividad es de $8 \cdot 10^{-7}$ ohm·m y su sección es de 0,55 cm^2, hallar la longitud del hilo que constituye dicha resistencia.

9. Un cazo eléctrico está conectado a 125 voltios y la intensidad de la corriente que circula por su resistencia es de 1,4 amperios. Hacemos hervir agua a la presión atmosférica normal y suponemos que la cantidad de vapor desprendido durante la ebullición por unidad de tiempo es constante. Determinar el número de gramos de vapor desprendido por segundo. (Calor de vaporización del agua en aquellas condiciones: 537 cal/g.)

CAPÍTULO XVII

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

Concepto de fuerza electromotriz. — Para que por un circuito cerrado circule una corriente necesitamos un artificio que nos cree y mantenga una diferencia de potencial. A este artificio se le llama *generador eléctrico* (por ejemplo, una pila, una dínamo, etc.). Un generador eléctrico posee una fuerza electromotriz que es la causa que crea y mantiene la diferencia de potencial. El generador no crea cargas, lo único que hace es moverlas. En el caso de un conductor metálico, mueve electrones en cierto sentido y origina una corriente eléctrica. En el movimiento de estas cargas se consume una energía con el tiempo. El generador debe transformar una energía (mecánica-química, etc.) en energía eléctrica. Esta energía por unidad de tiempo será la potencia del generador. La relación de dicha potencia a la intensidad de la corriente es la *fuerza electromotriz* del generador. No es, pues, una fuerza, ya que potencia dividida por intensidad es lo mismo que energía dividida por carga:

$$\frac{P}{I}=\frac{\mathfrak{E}}{It}=\frac{\mathfrak{E}}{Q}$$

las dimensiones de la fuerza electromotriz coinciden, pues, con las de la diferencia de potencial y se medirá en voltios (en el sistema MKSC). Escribiremos, pues, $\mathcal{E}=\frac{P}{I}$ (siendo $\mathcal{E}$ la fuerza electromotriz o electromotancia).

Supongamos que en un circuito tenemos conectado un acumulador en carga o un motor eléctrico en marcha, es decir, un receptor; en este caso se consume energía eléctrica, la cual se transforma en otro tipo de energía (química, o mecánica en los dos ejemplos citados); esto independientemente del consumo de energía debida al efecto Joule en las resistencias. Llamaremos *fuerza contraelectromotriz* a la potencia eléctrica consumida por unidad de intensidad de la corriente que circula. Escribiremos $P=\mathcal{E}'I$. Siendo P la potencia eléctrica consumida y $\mathcal{E}'$ la fuerza contraelectromotriz. Si una pila se conecta en un circuito, donde circula una corriente, en sentido contrario (con la polaridad invertida), de forma que se oponga al

paso de la corriente, su fuerza electromotriz actúa como una fuerza contraelectromotriz. La fuerza contraelectromotriz se mide en las mismas unidades que la fuerza electromotriz; en el sistema MKSC se mide en voltios.

Ley de Ohm generalizada. — Consideremos una pila conectada a los extremos de una resistencia R. La pila posee una resistencia interna r, lo cual implica una pérdida de energía, que se transforma en calor, dentro de la pila, al circular la corriente. Si la fuerza electromotriz de la pila es $\mathcal{E}$ la potencia eléctrica suministrada por el generador al circular una corriente I por el circuito vale $\mathcal{E}I$. Esta potencia se consume en el circuito exterior (de resistencia R) y en el interior del generador. Recordando que la potencia disipada por una resistencia al circular una corriente eléctrica I vale RI^2, podemos escribir $\mathcal{E}I = rI^2 + RI^2$; simplificando:

$$\mathcal{E} = (r + R)I \quad \text{de donde} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Como RI es igual a la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia exterior R o bien en los bornes del generador (también llamada tensión en los bornes del generador), podemos escribir

$$\mathcal{E} = (V_A - V_B) + rI$$

despejando la diferencia de potencial:

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - rI$$

De aquí deducimos que la diferencia de potencial es igual a la fuerza electromotriz si la resistencia interna del generador es nula o si no circula intensidad (circuito abierto). Al producto rI se le llama caída de potencial o caída de tensión en el interior del generador. Al producto de la intensidad por la resistencia del conductor por el cual circula se le llama caída de tensión en el conductor. Si fuese nula la resistencia del conductor, la caída de tensión en él sería nula.

Consideremos un circuito cerrado formado por una resistencia R y varios generadores y receptores. Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ las fuerzas electromotrices de los generadores; $\mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2', \ldots$ las contraelectromotrices de los receptores: $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_1', r_2', r_3', \ldots$, las respectivas resistencias internas de ellos. Al circular una intensidad I por el circuito citado tenemos: potencia suministrada por los generadores igual a la suma de las potencias consumidas por los receptores más la potencia disipada por efecto Joule. Escribiremos, pues:

$$\mathcal{E}_1 I + \mathcal{E}_2 I + \ldots = \mathcal{E}_1' I + \mathcal{E}_2' I + \ldots + r_1 I^2 + r_2 I^2 + \ldots + r_1' I^2 + r_2' I^2 + \ldots + R I^2$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots = \mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2' + \ldots + (r_1 + r_2 + \ldots + r_1' + r_2' + \ldots + R) I$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots - (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2' + \ldots)}{r_1 + r_2 + \ldots + r_1' + r_2' + \ldots + R} = \frac{\Sigma \mathcal{E} - \Sigma \mathcal{E}'}{\Sigma (r + R)}$$

Ésta es la ley de Ohm generalizada. Podemos enunciarla de la siguiente forma: la intensidad que circula por un circuito cerrado cuya resistencia exterior es R y en el cual existen varios generadores y receptores, es igual a la suma algebraica de las fuerzas electromotrices y contraelectromotrices (considerando que las contraelectromotrices son negativas) dividida por la suma total de resistencias (externa más internas).

Potenciómetro. — Consideremos un hilo conductor de resistencia preferiblemente elevada. Establecemos una diferencia de potencial entre sus extremos. La diferencia de potencial entre un extremo y un punto intermedio es igual al producto de la intensidad por la resistencia de la porción de conductor comprendida entre el extremo y el punto considerado. Si consideramos la diferencia de potencial entre el mismo extremo y otro punto más alejado que el que habíamos considerado anteriormente, la resistencia de la porción de conductor es mayor y por lo tanto mayor la diferencia de potencial. De esta forma, si consideramos un extremo del conductor y desplazamos un contacto móvil a lo largo del mismo, la diferencia de potencial va aumentando. De esta forma podemos lograr tener una variación de tensión desde cero hasta el valor de la diferencia de potencial entre los extremos del conductor. Se toma como punto fijo el de menor potencial y se desplaza el contacto móvil hasta el otro extremo, con lo cual tenemos tensiones crecientes desde cero hasta la diferencia de potencial entre los extremos del conductor. Esto constituye un potenciómetro.

Puede construirse un potenciómetro con un hilo fino sujeto por sus extremos sobre una madera o plancha de plástico o cualquier tipo de aislante. Un cursor se puede desplazar a lo largo de un soporte paralelo al hilo al mismo tiempo que establece contacto con el hilo por medio de una lámina de latón. Estableciendo una diferencia de potencial entre los extremos del hilo, la diferencia de potencial entre el contacto móvil y el extremo a menor potencial nos dará diferencias de potencial desde cero hasta la establecida entre los extremos, como se había dicho antes.

Si la longitud del hilo es l, es homogéneo y de sección constante; la resistencia del hilo es $R = \rho \frac{l}{S}$; la intensidad: $I = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{V_A - V_B}{\rho \frac{l}{S}}$.

La diferencia de potencial entre una posición X del cursor (fig. 29) y B vale

$$V_X - V_B = I R_X = \frac{V_A - V_B}{\rho \frac{l}{S}} \rho \frac{x}{S} = \frac{x}{l} (V_A - V_B)$$

Al variar X de 0 a l obtenemos las distintas diferencias de potencial.

De esta forma podemos calibrar el potenciómetro y saber la diferencia de potencial entre cualquier punto X y B en función de la longitud X. Podemos utilizar este potenciómetro para medir fuerzas electromotrices.

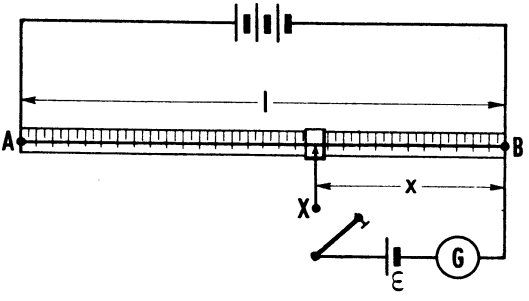


FIG. 29

Para ello efectuaremos la conexión indicada en la figura 29. La fuerza electromotriz a medir se conecta con el polo negativo en B (intercalando un galvanómetro G en serie). Con un interruptor podemos establecer contacto con el punto móvil X. Variando la posición de X, cuando el galvanómetro no señale paso de corriente (no se desvía), la diferencia de potencial $V_X - V_B = \mathcal{E}$, pues sabemos que en circuito abierto la diferencia de potencial es igual a la fuerza electromotriz. De esta forma podemos medir cualquier $\mathcal{E}$ cuyo valor sea igual o menor que $V_A - V_B$.

Algunas veces el hilo va arrollado en hélice alrededor de un cilindro aislante. Tiene los extremos unidos a unos bornes a fin de facilitar las conexiones y una barra metálica aislada del hilo, con una corredera que contacta con el hilo a diferentes distancias.

Resistencias en serie y en paralelo. — Diremos que varias resistencias están en serie cuando están conectadas una a continuación de otra, tal como indica el esquema de la figura 30. La intensidad I que circula es la misma para todas las resistencias en serie. La diferencia de potencial en bornes de cada una de ellas vale:

$$V_A - V_M = I R_1$$

$$V_M - V_N = I R_2 \text{ sumando queda: } V_A - V_B = I (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$V_N - V_B = I R_3$$

La relación $\dfrac{V_A - V_B}{I}$ es, según la ley de Ohm, la resistencia del conductor formado por las tres resistencias, luego la resistencia equivalente de

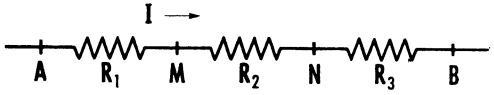


FIG 30

estas resistencias en serie es igual a la suma de cada una de ellas. Hemos hecho el razonamiento para tres resistencias; lo mismo vale para n resistencias. La diferencia de potencial entre los bornes de una de ellas es $V_A - V_M = I R_1$. Si las resistencias fuesen iguales,

$$R = n R_1 \quad \text{y} \quad V_A - V_M = \frac{V_A - V_B}{n R_1} R_1 = \frac{V_A - V_B}{n}$$

Si n resistencias iguales están en serie, la diferencia de potencial entre los bornes de cada una de ellas es la misma y es igual a la diferencia de potencial entre los extremos de la serie dividida por el número n de resistencias.

Varias resistencias están conectadas en paralelo cuando los extremos de cada una de ellas están con los de las otras (fig. 31). Sean A y B los pun-

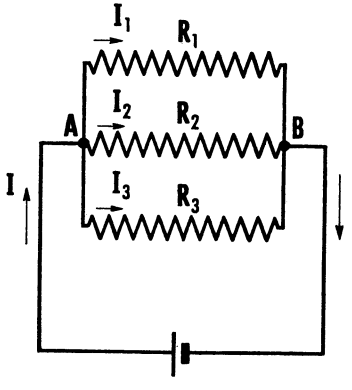


FIG. 31

tos comunes de los extremos de las resistencias. A la diferencia de potencial entre A y B le vamos a llamar V (tensión en bornes de las resistencias). La intensidad de la corriente que circula por cada resistencia es

$$I_1 = \frac{V}{R_1}; \qquad I_2 = \frac{V}{R_2}; \qquad I_3 = \frac{V}{R_3}$$

La intensidad total I es igual a la suma de las intensidades que circulan por cada una de las resistencias (primera regla de Kirchhoff):

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}; \qquad \frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

la resistencia del circuito equivalente al AB es $R = \frac{V}{I}$; luego

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

En general, si tenemos n resistencias R_i en paralelo, $\frac{1}{R} = \sum_1^n \frac{1}{R_i}$. Si éstas son iguales,

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{R_i}, \qquad R = \frac{R_i}{n}$$

Caso de dos resistencias, R_1 y R_2 en paralelo, como $V = I_1 R_1 = I_2 R_2$, se verifica $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$, las intensidades están en razón inversa de las resistencias. Debe verificarse $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, la resistencia equivalente es, pues, $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Vamos a aplicar lo antedicho al problema del *shunt*. Sea un aparato eléctrico por el cual queremos que circule una fracción de la intensidad que llega por el hilo que conduce la corriente al citado aparato. Colocaremos una resistencia en paralelo con él, de forma que si es I la intensidad que llega, pase a través del aparato I/K. Conociendo la resistencia r del aparato, y R la resistencia que le conectamos en paralelo (shunt), debe verificarse que las resistencias estén en razón inversa de las intensidades. Como la intensidad que circula por el shunt vale $I - I/K$, escribiremos:

$$\frac{\frac{I}{K}}{I - \frac{I}{K}} = \frac{R}{r}, \qquad R = \frac{rI}{KI\left(1 - \frac{1}{K}\right)} = \frac{r}{K-1}.$$

Ésta es, pues, la resistencia del shunt. Conocida la intensidad que circula por el aparato (por ejemplo, caso de que el aparato sea un amperímetro), la intensidad total es K veces mayor. A K se le llama a veces *factor de reducción* del shunt.

Problema: Tenemos un circuito representado en la figura 32. La fuerza

electromotriz de la pila es: $\mathcal{E} = 24$ voltios, su resistencia interna $r = 1{,}6\ \Omega$, la resistencia $R_1 = 8\ \Omega$, $R = 6\ \Omega$, y la resistencia interna del amperíme-

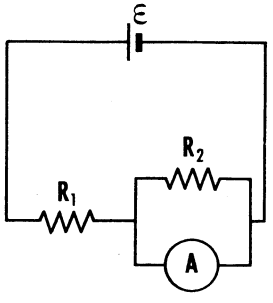


FIG. 32

tro A vale $r_A = 4\ \Omega$. Hallar la intensidad de la corriente total, el valor de K del shunt R y la indicación del amperímetro A.

$$R_t = r + R_1 + \frac{Rr_A}{R + r_A} = 1{,}6 + 8 + \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 9{,}6 + 2{,}4 = 12\ \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_t} = \frac{24}{12} = 2 \text{ amperios}$$

$$R = \frac{r}{K - 1}; \qquad K = \frac{r}{R} + 1 = \frac{4}{6} + 1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$I_A = \frac{I}{K} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5} = 1{,}2 \text{ amperios.}$$

Redes. — Una *red* es un circuito eléctrico constituido por generadores y receptores unidos por hilos de determinadas resistencias. Una pila conectada a los extremos de unas resistencias en serie o en paralelo es un caso particular de red. Generalmente, las redes son más complicadas y no pueden hallar las intensidades conociendo fuerzas electromotrices y resistencias aplicando las leyes de la asociación de resistencias en serie o paralelo. Más adelante veremos cómo se resuelve.

En una red debemos considerar los *nudos*, puntos de concurrencia de más de dos conductores, y las *mallas*, cualquier circuito cerrado que podamos describir en una red, sin pasar dos veces por el mismo nudo. En la figura 33 hemos representado una red, cuyos nudos son *A*, *B*, *C*, *D*, y las mallas *ABDA*, *DBCD*, *ADCA*, *ABCA*, *ABCDA*, *ADBCA*, *ABDCA*.

Reglas de Kirchhoff. — Para conocer las intensidades en una red eléctrica, conocidas las resistencias y fuerzas electromotrices, podemos utilizar

las reglas dadas por Kirchhoff. Éstas son: 1.ª *La suma de las intensidades de las corrientes que circulan por los hilos que convergen en un nudo, es igual a cero.* Al sumar dichas intensidades se tiene en cuenta su signo, podemos asignar signo positivo a la corriente que se dirige al nudo y negativo el de la que se aleja del mismo. La 1.ª regla puede también enunciarse así: La suma de las intensidades de las corrientes que se dirigen al nudo es igual a la suma de las que se alejan de él. 2.ª *La suma de los productos de las intensidades por las resistencias, en una malla, es igual a la suma de las fuerzas electromotrices* Para atribuir un signo a las intensidades y fuerzas electromotrices en una malla se establece un sentido de rotación a lo largo de ella, la intensidad que tenga el mismo sentido que el de rotación establecido es positiva, y de lo contrario, negativa. Para las fuerzas electromotrices nos servimos del mismo sentido de rotación, éstas son positivas si dicho sentido va de polo negativo a positivo, y negativas en caso contrario. Las fuerzas contraelectromotrices de los receptores son siempre negativas.

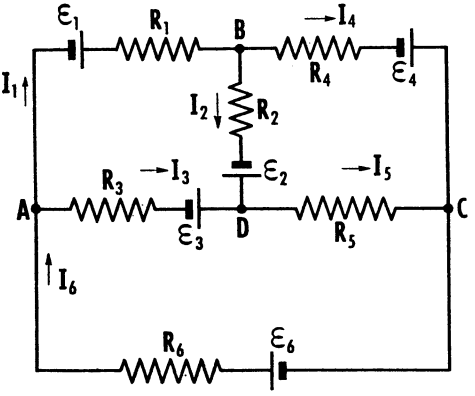


FIG. 33

Vamos a demostrar estas reglas:

La primera es evidente, pues al no poderse almacenar cargas eléctricas en un punto, la suma de las intensidades que a él llegan debe ser igual a la suma de las intensidades que de él parten.

Para demostrar la segunda, vamos a tener en cuenta la malla *ABDA* de la figura 33. Primeramente vamos a establecer el valor de las diferencias de potencial en los distintos tramos de la malla. El sentido de la intensidad, según lo indicado en capítulo anterior, será el del punto de mayor potencial al de menor potencial. Para hallar la diferencia de potencial $V_A - V_B$ haremos el siguiente razonamiento: La potencia eléctrica disponible entre A y B es $(V_A - V_B) I_1$, más la producida por el generador de fuerza electromotriz $\mathcal{E}_1$, que será disipada por efecto Joule en la resisten-

cia R_1 (que es igual a la suma de todas las resistencias del circuito AB), así, pues, escribiremos:

$$(V_A - V_B)\, I_1 + \mathcal{E}_1\, I_1 = R_1\, I_1^2$$

dividiendo por I_1 tenemos:

$$V_A - V_B + \mathcal{E}_1 = R_1\, I_1; \qquad V_A - V_B = R_1\, I_1 - \mathcal{E}_1.$$

Si la pila estuviese con la polaridad invertida o fuese un receptor, el signo de la $\mathcal{E}$ sería negativo y escribiríamos:

$$V_1 - V_2 = RI + \mathcal{E}$$

Así, pues, tendremos:

$$V_A - V_B = I_1\, R_1 - \mathcal{E}_1$$
$$V_B - V_D = I_2\, R_2 - \mathcal{E}_2$$
$$V_A - V_D = I_3\, R_3 - \mathcal{E}_3$$

sumando las dos primeras y restando la tercera resulta:

$$0 = I_1\, R_1 + I_2\, R_2 - I_3\, R_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

o bien

$$I_1\, R_1 + I_2\, R_2 - I_3\, R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$$

Estableciendo el sentido de rotación $ABDA$, las intensidades I_1 e I_2 son positivas, la I_3 negativa. Para la pila de fuerza electromotriz $\mathcal{E}_1$, el sentido va de negativo a positivo, para la $\mathcal{E}_2$ también y para la $\mathcal{E}_3$ el sentido es contrario. Las dos primeras serán positivas y la tercera negativa.

Problema: Hallar las intensidades de la red indicada en el esquema de la fig. 33 para los siguientes valores de la resistencia y fuerzas electromotrices:

$R_1 = 2\ \Omega$	$R_4 = 2\ \Omega$	$\mathcal{E}_1 = 2$ V	$\mathcal{E}_4 = 4$ V
$R_2 = 4\ \Omega$	$R_5 = 10\ \Omega$	$\mathcal{E}_2 = 4$ V	$\mathcal{E}_6 = 4$ V
$R_3 = 2\ \Omega$	$R_6 = 4\ \Omega$	$\mathcal{E}_3 = 6$ V	

Como desconocemos las intensidades, les asignamos un sentido arbitrario, que es el que está indicado en el esquema.

Tenemos 6 incógnitas, necesitamos 6 ecuaciones.

En los nudos A, B, C y D se verifica:

$$I_6 = I_1 + I_3$$
$$I_1 = I_2 + I_4$$
$$I_5 + I_4 = I_6$$
$$I_2 + I_3 = I_5$$

Esta última ecuación es el resultado de sumar la primera y la segunda, debemos suprimirla. Faltan tres ecuaciones.

En la malla ABD se verifica (con el sentido $ABDA$):

$$2I_1 + 4I_2 - 2I_3 = 2 + 4 - 6 = 0$$

En la malla *BCDB* (con el sentido *BCDB*):

$$2I_4 - 10I_5 - 4I_2 = 4 - 4 = 0$$

En la malla *ADCA* (con el sentido *ADCA*):

$$2I_3 + 10I_5 + 4I_6 = 6 + 4 = 10$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} I_1 & + & I_3 & & & - & I_6 = 0 \\ I_1 & - & I_2 & - & I_4 & & = 0 \\ & & & & I_4 & + I_5 - & I_6 = 0 \\ 2I_1 & + & 4I_2 & - & 2I_3 & & = 0 \\ & - & 4I_2 & + & 2I_4 & - 10I_5 & = 0 \\ & & & & 2I_3 & + 10I_5 + & 4I_6 = 10 \end{array}\right\}$$

De las tres primeras deducimos:

$$I_6 = I_1 + I_3$$
$$I_4 = I_1 - I_2$$
$$I_5 = I_3 + I_2$$

Sustituyendo en las tres últimas obtenemos (después de simplificar):

$$\left.\begin{array}{r} I_1 + 2I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 - 8I_2 - 5I_3 = 0 \\ 2I_1 + 5I_2 + 8I_3 = 5 \end{array}\right\}$$

Restando las dos primeras tenemos:

$$10I_2 + 4I_3 = 0$$

Restando de la última el doble de la segunda hallamos:

$$21I_2 + 18I_3 = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} 10I_2 + 4I_3 = 0 \\ 21I_2 + 18I_3 = 5 \end{array}\right\}$$ Resolviendo, encontramos:

$$I_2 = -\frac{5}{24}$$
$$I_3 = \frac{25}{48}$$

Las demás intensidades valen:

$$I_1 = I_3 - 2I_2 = \frac{5}{48} \qquad I_5 = I_3 + I_2 = \frac{5}{16}$$

$$I_4 = I_1 - I_2 = \frac{5}{48} + \frac{5}{24} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16} \qquad I_6 = I_1 + I_3 = \frac{5}{4}$$

El que nos haya salido la I_2 negativa indica que el sentido que habíamos asignado a dicha corriente estaba equivocado; su sentido será, pues, de *D* a *B*.

Siempre que al resolver un problema relativo al cálculo de las intensidades de una red, por aplicación de las reglas de Kirchhoff, si en el resultado alguna de las intensidades resulta negativa indica que a dicha corriente le habíamos asignado un sentido contrario al que realmente tiene.

PRÁCTICAS

Comparación de fuerzas electromotrices con el galvanómetro balístico. — Utilizaremos el dispositivo representado en la figura 22. Cargamos el condensador C por medio de la pila P colocando el interruptor en la posición c. La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador será igual a la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ de la pila, ya que estamos en circuito abierto. La carga del condensador es $Q = C\,\mathcal{E}$. Al descargar el condensador a través del galvanómetro G, (colocando el interruptor en la posición d) la desviación α será igual a $K\,Q$ (según vimos en las prácticas del capítulo XV) luego $\alpha = K\,C\,\mathcal{E}$.

Sustituimos la pila P por otra P', cuya fuerza electromotriz sea $\mathcal{E}'$.

Repitiendo la carga y descarga del mismo condensador obtenemos $\alpha' = K\,C\,\mathcal{E}'$. La relación de las desviaciones es $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$, de aquí se deduce que si conocemos una de las fuerzas electromotrices, podemos hallar la otra (midiendo las α del galvanómetro).

Medida de resistencias con el puente de Wheatstone. —En la figura 34 hemos representado el esquema de un puente de Wheatstone. Variando una de

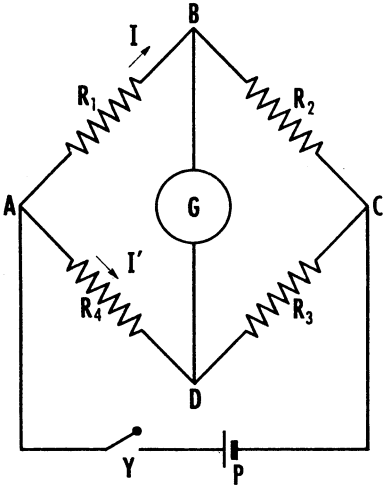


FIG. 34

las resistencias, por ejemplo la R_4, podemos lograr que la intensidad que circula por el galvanómetro G sea nula (al cerrar el interruptor Y el galvanómetro no se desvía). Cuando ocurre esto, la diferencia de potencial entre B y D es nula. La corriente I que circula por $A\,B$ es la misma que la que circula por

$B\,C$, y la I' que circula por $A\,D$ es la misma que la que circula por $D\,C$. Entonces se verifica:

$$\left.\begin{aligned} V_A - V_B &= I\,R_1 \\ V_A - V_D &= I'\,R_4 \end{aligned}\right\} \text{ Restando tenemos: } V_D - V_B = I\,R_1 - I'\,R_4$$
$$\text{como: } V_A - V_B = 0$$

$$\left.\begin{aligned} V_B - V_C &= I\,R_2 \\ V_D - V_C &= I'\,R_3 \end{aligned}\right\} \text{ restando: } V_B - V_D = I\,R_2 - I'\,R_3 \qquad \text{como: } V_B - V_D = 0$$

$$\left.\begin{aligned} I\,R_1 &= I'R_4 \\ I\,R_2 &= I'R_3 \end{aligned}\right\} \text{ dividiendo: } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

Conociendo tres de las resistencias del puente se determina la cuarta:

$$R_1 = \frac{R_2\,R_4}{R_3}$$

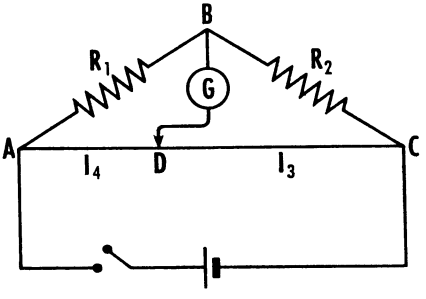


FIG. 35

En algunos modelos (puente de hilo, figura 35) se sustituyen las resistencias R_3 y R_4 por un hilo homogéneo adosado a una regla graduada. El punto D es un contacto móvil que se desplaza a lo largo del hilo. Cuando el galvanómetro indica que no pasa corriente (puente equilibrado) se verifica:

$$R_1 = R_2 \frac{l_4}{l_3}$$

$$\text{ya que } \quad R_4 = \rho \frac{l_4}{s} \quad \text{y} \quad R_3 = \rho \frac{l_3}{s}$$

como las ρ y las s son iguales,

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{l_4}{l_3}$$

Midiendo l_4 y l_3 con la regla graduada, o mejor fijándonos que si la longitud de la regla es l; $l_4 = l - l_3$, el valor de la resistencia R_1 conociendo R_2 y midiendo l_3 es:

$$R_1 = R_2 \frac{l - l_3}{l_3}$$

Al medir resistencias con el puente, se tiene que procurar que las resistencias de los brazos AB, BC, AD y DC, sean aproximadamente iguales. En el puente de hilo debe verificarse que la resistencia conocida R_2 sea aproximadamente del mismo orden que la incógnita R_1. Esto se averigua por quedar equilibrado dicho puente estando el cursor situado próximo a la posición central.

Cuando se cumple la condición anterior el puente tiene máxima sensibilidad.

Para la realización práctica de un puente de hilo se toma una regla de madera de 1 m de longitud dividida en milímetros. Se coloca un hilo metálico de cualquier aleación de las que el coeficiente de temperatura sea muy pequeño y que la resistividad sea bastante elevada (manganina $\varrho = 44 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$, $\gamma = 10^{-5}\ grad^{-1}$ o nicrom $\varrho = 10^{-6}\ \Omega \cdot m$, $\gamma = 4 \cdot 10^{-4}\ grad^{-1}$) sujeto a los extremos de la regla (que a su vez podemos situar sobre una tabla de madera). En los extremos del hilo colocamos dos terminales para que las conexiones se puedan hacer con comodidad. Se toma una pila de 4,5 voltios que se conectará a los terminales del hilo, intercalando un interruptor para evitar el desgaste de la pila y sólo se cerrará el circuito en el instante de comprobar el equilibrio. Se conecta la resistencia desconocida entre un terminal del hilo y el principio de una caja de resistencias conectando el extremo de la caja con el otro terminal del hilo. El galvanómetro (puede usarse un microamperímetro) se conecta entre el punto B, común a la resistencia y al principio de la caja, con el cursor D que se desplaza sobre el hilo. El contacto del cursor con el hilo se verifica por medio de una lámina metálica delgada que podamos oprimir para el contacto y luego por medio de un muelle asciende y abre el circuito. El cursor tiene una muesca en un mismo plano vertical que la lámina y próxima a la regla para poder leer las longitudes y evitar error de paralaje. Se va desplazando el cursor, se oprime para hacer contacto con el hilo y se va observando el galvanómetro hasta que no se desvíe al efectuar el contacto. Cada vez que se efectúe el contacto debe haberse cerrado el interruptor de la pila.

Medida de la resistencia interna de una pila. — Sea la pila P de la cual queremos saber su resistencia interna. Formamos un circuito cerrado con la pila, un amperímetro y una resistencia variable en serie con el amperímetro.

Para un valor de la resistencia variable la intensidad que circula es I_1; modificamos la resistencia y la intensidad es I_2. Conociendo la resistencia interna del amperímetro (la cual se puede medir con un puente, caso de desconocerla) y la resistencia variable para las dos posiciones anteriores R_1 y R_2 (puede usarse una caja de resistencias) los valores de las intensidades I_1 e I_2 serán:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathcal{E}}{r + R_1} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}}{r + R_2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r + R_2}{r + R_1}, \quad \text{de donde:} \quad r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}.$$

Para medidas de mayor precisión podemos usar el método de Mance, que consiste en un puente de Wheaststone colocando la pila, de la cual queremos conocer su resistencia, en lugar de la resistencia R_1 (fig. 36). Se unen con un hilo conductor de resistencia despreciable (un hilo de cobre) los puntos B y D, intercalando un interruptor. El galvanómetro se conecta entre A y C; si varía-

mos las resistencias de forma que cerrando o abriendo el interruptor el galvanómetro señale la misma desviación, se demuestra que se verifica

$$\frac{r}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}, \quad \text{de donde:} \quad r = R_4 \frac{R_2}{R_3}.$$

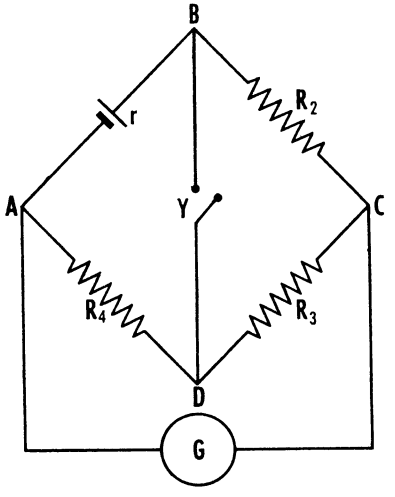


FIG. 36

Es conveniente conectar un shunt al galvanómetro, pues la intensidad que pasa por él podría ser mayor que la máxima tolerada.

CUESTIONES

1. *Entre las armaduras de un condensador cargado existe una diferencia de potencial. ¿Existe fuerza electromotriz?*

2. *¿Qué requisito debe cumplir un generador para que podamos afirmar que posee fuerza electromotriz?*

3. *¿Podemos disponer de corriente eléctrica sin disponer de energía, mecánica, química, etc.?*

4. *Cítense ejemplos de generadores que utilizan energía mecánica o química para proporcionarnos energía eléctrica.*

5. *Entendiendo por potencia útil de un generador el producto de la diferencia de potencial entre sus bornes por la intensidad de la corriente, deducir el valor del rendimiento de un generador.*

6. *Determinar el rendimiento de un receptor siendo ahora la potencia útil el producto de la fuerza contraelectromotriz por la intensidad.*

7. ¿Cuál sería la condición que debería cumplir un generador o un receptor para que el rendimiento eléctrico fuese de 100 %?

8. Cítense ejemplos de receptores que utilizan la energía eléctrica para producir otro tipo de energía.

9. Explicar cómo podríamos medir la intensidad de una corriente utilizando un potenciómetro y una resistencia conocida.

10. Montando dos bombillas en serie de distinta resistencia a una diferencia de potencial doble de la que debe existir en los bornes de cada una (supuesto que ésta sería la misma para cada bombilla por separado), una de las bombillas se funde. Explicar el porqué y cuál de ellas sería.

11. En un puente de Wheatstone si permutamos la pila y el galvanómetro, ¿subsiste el equilibrio?

12. Conectamos dos pilas uniendo entre sí sus polos positivos y sus negativos. ¿Qué ocurre? Discutir el resultado según el valor de las fuerzas electromotrices.

PROBLEMAS

1. Una pila de fuerza electromotriz 4,5 voltios se conecta a los extremos de una resistencia de 2 Ω. siendo la resistencia interior de la pila 0,25 Ω. Hallar la intensidad de la corriente que circula por la resistencia y la diferencia de potencial entre sus extremos.

2. En el circuito del problema anterior intercalamos un amperímetro en serie con la resistencia, siendo la resistencia interna del amperímetro 1,5 Ω, determinar la intensidad que señala dicho aparato.

3. Dadas 4 resistencias iguales a 10 Ω cada una, hallar la resistencia equivalente de los circuitos que podamos formar con estas resistencias.

4. Conectamos una pila de fuerza electromotriz 9 V y resistencia interna 1,2 Ω a dos resistencias en paralelo de valores 6 Ω y 9 Ω. Determinar la intensidad de la corriente que circula por cada una de las resistencias y la caída de tensión en el interior de la pila.

5. Con un alambre cuya resistencia por unidad de longitud es 1,2 Ω/cm construimos un triángulo equilátero de lado 3 m. Entre dos vértices conectamos una pila de 0,75 V y resistencia interna 1,5 Ω. Hallar las intensidades en los lados del triángulo y la potencia disipada en el interior de la pila.

6. Con el mismo alambre anterior construimos una circunferencia de un metro de diámetro. Conectamos una pila entre dos puntos de la circunferencia. Hallar la intensidad total en función del ángulo que forman los radios que trazamos uniendo el centro y los puntos de conexión. Resistencia interna de la pila: 1 Ω. Determinar cuándo la intensidad sería mínima. La f. e. m. de la pila=10 voltios

7. Conectamos dos pilas de fuerzas electromotrices 10 V y 8 V y resistencias internas 1 Ω y 2 Ω, respectivamente, en paralelo con una resistencia de 2 Ω. Determinar las intensidades en el circuito.

8. Construimos un potenciómetro con un hilo de 2 m de longitud y 1 mm^2 de sección; la resistividad del hilo es de 10^{-4} Ω·cm. Conectamos en sus extremos una pila de 4,5 V de fuerza electromotriz y 0,1 Ω de resistencia interna. Determinar la longitud de hilo que corresponde a una caída de tensión de 1 voltio.

9. Tenemos un puente de Wheatstone como el representado en la fig. 34. Los valores de las resistencias son: $R_1=100\ \Omega$, $R_2=200\ \Omega$, $R_3=160\ \Omega$ y $R_4=50\ \Omega$. La pila tiene una fuerza electromotriz de 1,5 voltios y el galvanómetro tiene una resistencia interna de 200 Ω. Siendo la resistencia interna de la pila despreciable, determinar la intensidad de la corriente que circula por el galvanómetro.

10. La resistencia R_4 del problema anterior la colocamos en un recinto a cierta temperatura. Suponiendo que inicialmente estaba a 0°C y que su coeficiente de temperatura $r=0{,}004\ \text{grad}^{-1}$, determinar a qué temperatura debería estar dicho recinto para que el puente estuviese equilibrado.

CAPÍTULO XVIII

ELECTROMAGNETISMO

Campo magnético. — La propiedad que posee la magnetita de atraer el hierro fue conocida hace muchos años. La misma propiedad posee una barra de acero frotada con la citada magnetita. Esta propiedad se acentúa en los extremos de la barra, a los cuales se les llama *polos*, pudiendo ponerse de manifiesto espolvoreando dicha barra con limaduras de hierro (véase prácticas). Una aguja imanada (brújula) se orienta, señalando aproximadamente la dirección S-N, debido a la existencia del llamado campo magnético terrestre. A principios del siglo XIX se encontró que las corrientes eléctricas producían efectos magnéticos, y más adelante se observó que un imán acercándose o alejándose de un circuito producía una corriente. Estos hechos dieron lugar a que se iniciase el estudio del Electromagnetismo, relacionando el magnetismo con la electricidad, que hasta entonces se habían estudiado como fenómenos independientes.

Las acciones magnéticas ponen de manifiesto la existencia de fuerzas que atraen al hierro u orientan la brújula, y de aquí que podamos suponer la existencia de un campo magnético. Dicho campo es una magnitud vectorial cuya dirección nos la indica la orientación de una brújula en todos los puntos del espacio donde se dejen sentir sus efectos o, lo que es lo mismo, donde exista dicho campo.

Una acción magnética muy importante es la fuerza que se observa sobre cargas eléctricas en movimiento, cuando la dirección del campo magnético no coincide con la dirección de la velocidad de las citadas cargas. Cuando se descubrieron los llamados *rayos catódicos* (electrones a gran velocidad dentro de un tubo en el cual se ha practicado el vacío), se comprobó que un imán los desviaba de su trayectoria, lo cual indica que sobre dichas cargas el campo magnético ejerce una fuerza. Como el campo magnético puede ser originado por una corriente eléctrica (cargas en movimiento), podemos llegar a la conclusión de que las cargas eléctricas en movimiento actúan sobre otras cargas en movimiento ejerciendo una fuerza, siempre que la dirección del campo magnético creado por las primeras no coincida con la dirección de la velocidad de las segundas. Si las cargas están en reposo, las acciones entre ellas son sólo de tipo electrostático; si se mueven simultáneamente, además de la acción electrostática existe otra de tipo magnético.

Más adelante veremos que las propiedades magnéticas de la materia son debidas a los movimientos de los electrones atómicos. En resumen: las

acciones magnéticas son debidas al movimiento de cargas eléctricas. Así pues, los fenómenos magnéticos, antiguamente estudiados en el *Magnetismo*, constituyen simplemente un capítulo de la Electricidad.

En lo que sigue, si no se advierte lo contrario, supondremos el campo magnético en el vacío (o en el aire, que aproximadamente es el mismo), ya que el medio influye en dicho campo.

Definición del vector $\vec{B}$. — Para definir el campo magnético precisamos dar en cada punto del espacio donde se manifieste un vector de la misma dirección y sentido que el campo, al cual llamaremos intensidad del campo

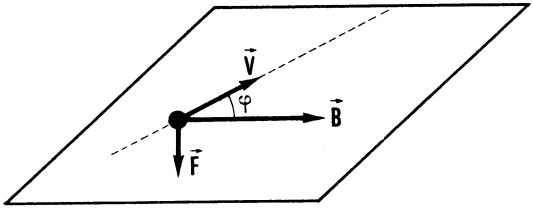


FIG. 41

o densidad de flujo. A este vector lo designaremos con la letra $\vec{B}$. Para hallar el módulo de B utilizaremos el efecto causado sobre cargas eléctricas en movimiento. Experimentalmente se ha constatado que si tenemos una carga eléctrica positiva que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético de intensidad B cuya dirección forme un ángulo φ con la dirección de la velocidad de la carga, la fuerza que se ejerce sobre ella vale $F = qvB \cdot \text{sen } \varphi$, siendo su dirección perpendicular al plano determinado por la dirección del campo y la velocidad de la carga. El sentido es el de avance de un sacacorchos al girar de $\vec{v}$ a $\vec{B}$. Esta fuerza puede expresarse como producto vectorial de $q\vec{v} \wedge \vec{B}$, y escribimos: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (fig. 41). Despejando B de la expresión $F = qvB$ sen φ tenemos:

$$B = \frac{F}{q \cdot v \cdot \text{sen } \varphi}$$

de aquí podemos definir el módulo del vector $\vec{B}$. La dirección la determinamos con la brújula o experimentando en qué dirección la fuerza sobre la carga es nula (no se desvía). (Si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección $\varphi = 0$ y $F = 0$.) Para determinar el sentido basta aplicar la regla del producto vectorial, conocidos los de $\vec{v}$ y $\vec{F}$. Como regla práctica puede utilizarse la de la mano derecha. Extendiendo los tres dedos de la mano derecha, pulgar, índice y medio de modo que formen (aproximadamente) un triedro trirrectángulo, si colocamos el índice de forma que nos señale el sentido

de la velocidad y el pulgar el de la fuerza, el dedo medio nos dará la dirección y sentido del vector B. Si la carga fuese negativa (electrón), el sentido es el contrario al indicado.

Las dimensiones de B serán

$$[B] = \frac{[F]}{Q[v]} = \frac{M\,L\,T^{-2}}{Q\,L\,T^{-1}} = M\,T^{-1}\,Q^{-1}$$

Se mide en

$$\frac{\text{newton}}{\text{culombio}\cdot\text{m/seg}} = \frac{\text{newton}}{\text{amperio}\cdot\text{m}}$$

Podemos definir el flujo del vector $\vec{B}$ tal como en electrostática definíamos el flujo del vector $\vec{E}$. Si $\vec{B}$ es constante, el flujo magnético a través de una superficie S es igual a $B \cdot S \cos \varphi$, y escribimos $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$. Si el vector $\vec{B}$ es perpendicular a la superficie, el flujo $\Phi = B \cdot S$; de aquí vemos que $B = \frac{\Phi}{S}$; por esto a B se le llama también densidad de flujo. El flujo magnético en el sistema MKSC se mide en *weber;* el B podemos medirlo en weber/m^2. En el sistema electromagnético CGS se utiliza para medir B el *gauss*, siendo el weber/m^2 $= 10^4$ gauss. Las dimensiones del flujo son

$$\Phi = [B][S] = M\,T^{-1}\,Q^{-1}\,L^2 = M\,L^2\,T^{-1}\,Q^{-1}$$

Es fácil ver que

$$[\Phi] = \frac{M\,L^2\,T^{-2}}{Q\,T^{-1}} = \frac{\text{energía}}{\text{intensidad}} \quad \text{luego el} \quad \text{weber} = \frac{\text{julio}}{\text{amperio}}$$

Fuerza ejercida por un campo magnético sobre un conductor rectilíneo. — Consideremos un conductor rectilíneo recorrido por una corriente eléctrica. Según sabemos, esta corriente es debida al movimiento de electrones dentro del citado hilo. Si este conductor está situado en un campo magnético, los electrones en movimiento están sometidos a una fuerza, y por tanto el conductor estará sometido a la suma de las fuerzas ejercidas sobre cada electrón en movimiento. En la figura 42 representamos un conductor recto de longitud l y sección recta S. Sea I la intensidad de la corriente, que vale, según sabemos, $I = neSv$ (véase cap. XVI), siendo n el número de electrones por unidad de volumen, e la carga del electrón, y v la velocidad de dichos electrones. Supongamos que B sea constante.

Cada electrón estará sometido a una fuerza de módulo evB sen φ (siendo φ el ángulo que forma $\vec{B}$ con el hilo). El número de cargas en la longitud l es nSl. La fuerza ejercida sobre los electrones móviles en el hilo de longitud l será $F = evB \cdot \text{sen}\varphi \cdot nSl$ (ya que todas las fuerzas sobre cada electrón tienen la misma dirección y sentido).

Sustituyendo el valor de la intensidad, la fuerza será $F = IBl$ sen φ.

Para determinar el sentido de $\vec{F}$ podemos aplicar la regla de la mano derecha teniendo presente que el sentido de la corriente es el contrario al de la velocidad de los electrones. En la figura 42 está indicado el sentido de $\vec{F}$, $\vec{B}$ y el de la corriente. Vectorialmente $\vec{F} = \vec{Il} \wedge \vec{B}$ (el sentido de $\vec{l}$ es el de la corriente). Si el campo es perpendicular al hilo, $\varphi = 90°$ y sen $\varphi = 1$, entonces $F = IBl$.

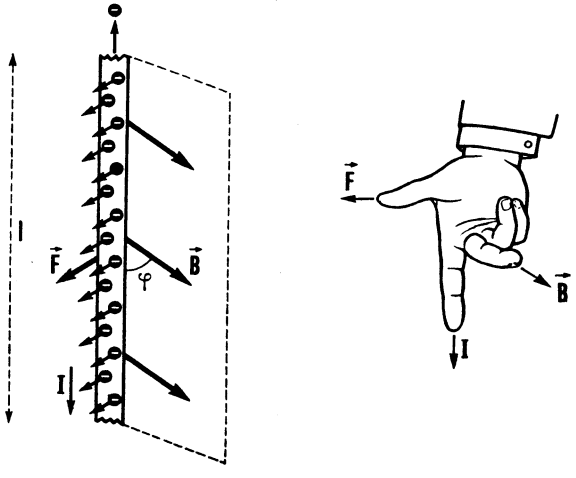


FIG. 42

Ejemplo: Un hilo es recorrido por una corriente de 15 A y está colocado en un lugar donde existe un campo magnético de 6 weber/m² perpendicular al hilo. Determinar la fuerza por metro de conductor.

$$F = 15 \cdot 6 \text{ newton.}$$

Si el campo no fuese constante, tomaríamos un elemento dl de hilo y hallaríamos la suma de las fuerzas. Siendo $\vec{B}$ variable (incluso en dirección), expresaremos la suma vectorial en forma de integral del producto vectorial:

$$\vec{F} = I \int_0^l \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Fuerza sobre una espira. — Consideremos una espira rectangular (figura 43) de base b y altura l, recorrida por una corriente de intensidad I. Esta espira está situada en un campo magnético de forma que B sea constante y forme un ángulo φ con la normal al plano de la espira, pero contenido en un plano normal al de la espira. El lado NC está sometido a una fuerza F_1 de módulo IBl perpendicular al plano formado por B y NC de sentido tal como el dibujado, dado por la regla de la mano de-

recha. El conductor MD está sometido a una fuerza $F = IBl$ igual en módulo y dirección a la F_1, pero de sentido contrario (basta aplicar la regla de la mano derecha). El conductor MN está sometido a la fuerza F_2, que vale IBb sen φ, dirigida hacia abajo según la altura. El lado DC está so-

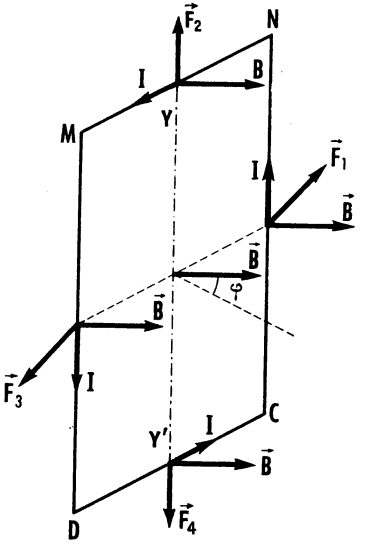


FIG. 43

metido a la fuerza F_4 de módulo IB sen φ dirigida según la altura hacia arriba. De esto deducimos que las fuerzas F_2 y F_4 se anulan (son opuestas) y que las F_1 y F_3 forman un par de fuerzas. Si la espira puede girar alrededor de un eje vertical (por ejemplo el YY') girará por la acción del citado par de fuerzas cuyo momento es $P = IBl \cdot b$ sen $\varphi = IBS$ sen φ (siendo S la superficie de la espira $S = bl$). Al girar la espira el momento va disminuyendo hasta que se anula cuando $\varphi = 0$, entonces el plano de la espira está situado de forma que $\vec{B}$ le es perpendicular. Según se ve en la figura, el sentido de giro es NC hacia la izquierda y MD hacia la derecha. Si la corriente fuese de sentido contrario, el giro sería contrario (basta observar que las fuerzas tendrían signo contrario). Puede darse una regla práctica que dice: Cuando la espira está en equilibrio en el campo, mirando a la espira en sentido del campo, veremos que la corriente circula en el mismo sentido que las agujas de un reloj (compruébese en la figura).

Si la espira es circular, puede aplicarse el mismo resultado. El momento del par es igual a $IBS \cdot$sen φ. Si puede girar libremente alrededor de un eje se colocaría de forma que el $\vec{B}$ sea perpendicular a su plano y el sentido del giro lo determinamos según la anterior regla práctica.

Al producto IS le atribuimos carácter vectorial y le llamaremos momento magnético $\vec{M} = I\vec{S}$, su dirección es perpendicular al plano de la espira, su sentido dado por la regla del sacacorchos, si gira un sacacorchos en el sentido de la corriente, el de $\vec{M}$ es el de avance de dicho sacacorchos. De esta forma podemos escribir el momento del par de fuerzas en forma de producto vectorial $\vec{P} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, de esta forma hay equilibrio cuando M y B coinciden en dirección y sentido. Esto justifica la regla práctica dada anteriormente (fig. 44). El momento magnético se mide en $A \cdot m^2$. Sus dimensiones son: $[M] = L^2 T^{-1} Q$.

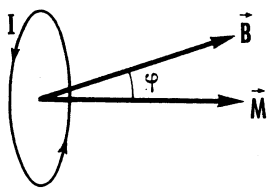


FIG. 44

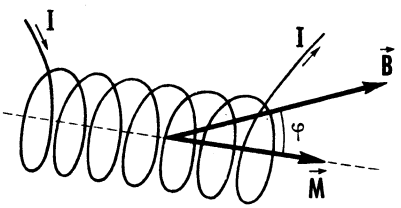


FIG 45

Fuerza sobre un solenoide. — Supongamos un carrete de hilo conductor (solenoide) con las espiras aisladas entre sí y muy próximas. Puede considerarse que la acción total es la suma de las acciones sobre cada espira que, prácticamente, puede considerarse circular. Según hemos visto, cada espira está sometida a un par de fuerzas de momento IBS sen φ, como todos los pares tienen los momentos iguales en módulo, dirección y sentido, al sumar sus momentos obtenemos: $P = NIBS$ sen φ (siendo N el número de espiras del solenoide). Para el sentido de giro se aplica la misma regla dada para el caso anterior.

Al producto NIS le llamaremos M, momento magnético del solenoide, que es la suma de los momentos magnéticos de cada espira. Su dirección coincide con la del eje de simetría y el sentido el dado por el de avance de un sacacorchos al girar según la corriente, como hemos dicho antes (figura 45). Como antes, podemos escribir: $\vec{P} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Problema: Un solenoide de 1000 espiras, que puede girar alrededor de un eje vertical, está colocado de forma que su eje sea perpendicular al meridiano magnético terrestre. Siendo la componente horizontal de la intensidad del campo magnético terrestre $0{,}25 \cdot 10^{-4}$ weber/m^2, la sección recta del solenoide 80 cm^2, hallar el momento magnético del solenoide y el momento del par de fuerzas al cual está sometido, al ser recorrido por una corriente de intensidad 2 A.

$$M = NIS = 1000 \cdot 2 \cdot 0{,}008 = 16 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$P = MB \text{ sen } 90° = 16 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ newton} \cdot \text{metro}.$$

Campo magnético creado por una carga en movimiento. — El campo magnético elemental, creado por una carga eléctrica positiva q, la cual se mueve con una velocidad v, en un punto que dista r de dicha carga vale:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot v \cdot \operatorname{sen} \varphi}{r^2}$$

(siendo φ el ángulo formado por $\vec{v}$ y $\vec{r}$).

El vector intensidad del campo $\vec{dB}$ es perpendicular al plano determinado por el vector velocidad de la carga y el punto donde consideramos el campo magnético. El sentido de $\vec{dB}$ es el de avance de un sacacorchos al

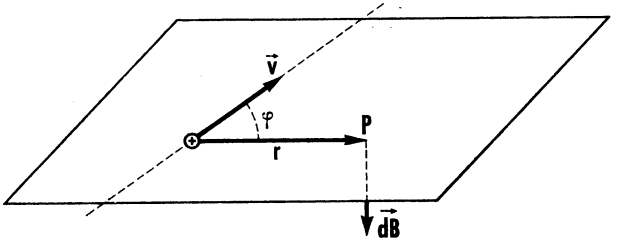


FIG. 46

girar de $\vec{v}$ a $\vec{r}$ (fig. 46). De lo anterior deducimos que $\vec{dB}$ puede expresarse como el producto vectorial

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

el valor de μ_0 depende del sistema de unidades elegido. El factor $1/4\pi$ se introduce para eliminar el 4π que aparece en algunas fórmulas.

Las dimensiones de μ_0 son:

$$[\mu_0] = \frac{[B]\, L^2}{[v]\, Q} = \frac{MT^{-1} Q^{-1} L^2}{LT^{-1} Q} = MLQ^{-2}$$

En el sistema MKSC se mide en:

$$\frac{\frac{\text{weber}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2}{\text{m/s} \cdot \text{culombio}} = \frac{\text{weber}}{\text{m} \cdot \text{amperio}}$$

y vale

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{weber} \cdot \text{m}}{\text{amperio}}$$

Campo creado por un elemento de corriente. — Consideremos un elemento dl de hilo conductor por el cual circula una corriente de intensidad I. El campo creado por un electrón que se mueve con la velocidad $\vec{v}$, vale en módulo:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \operatorname{sen} \varphi}{r^2}$$

la dirección de $\vec{dB}$ es la misma que en el caso anterior, pero de sentido contrario. El número de electrones en el elemento dl es $nSdl$ (siendo n el número de electrones por unidad de volumen, S la sección recta del conductor. El campo debido a estos electrones será:

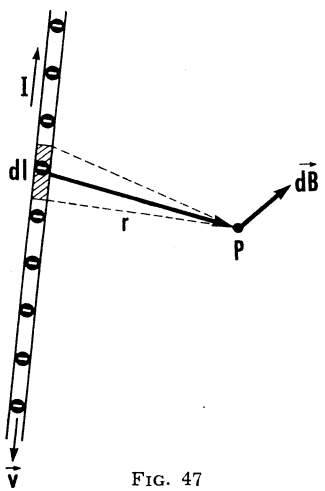


FIG. 47

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nSdl \cdot ev \operatorname{sen} \varphi}{r^2}$$

pero $nvSe = I$, así, pues,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \operatorname{sen} \varphi}{r^2}$$

o en forma vectorial

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^2}.$$

(llamada primera ley de Laplace).

Al considerar como sentido de la corriente el clásico (contrario al del movimiento de los electrones) el sentido de $\vec{dB}$ es el mismo que en el caso del movimiento de una carga positiva dado por el producto vectorial de la fórmula anterior (fig. 47). (En este caso el sentido de $\vec{dl}$ es el sentido clásico de la corriente.)

Campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida. — La intensidad del campo magnético creado por una corriente que circula por un hilo recto e indefinido en un punto distante a del hilo, es un vector cuya dirección es perpendicular al plano determinado por el hilo y el punto; su sentido lo determinamos aplicando el producto vectorial dado en la fórmula anterior o más práctico aplicando la regla del sacacorchos: si giramos un sacacorchos en el sentido del campo avanzará en el sentido de la corriente. El módulo de B es:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}.$$

Esta fórmula fue hallada experimentalmente por Biot y Savart. Las líneas de fuerza de este campo magnético son circunferencias concéntri-

cas, cuyo centro está en el eje del hilo La intensidad del campo en un punto es inversamente proporcional a la distancia del punto considerado al hilo.

Problema: Dos hilos rectos indefinidos están recorridos por una corriente de la misma intensidad de 20 A, en uno en sentido ascendente y descendente en el otro. Determinar la intensidad del campo magnético en el punto medio de un segmento que une los dos hilos. La distancia entre ellos es de 20 cm.

La intensidad del campo creado por el primero ($a = 0{,}1$ m) vale:

$$B = 10^{-7} \cdot \frac{2 \cdot 20}{0{,}1} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ weber/m}^2,$$

dirigido normalmente al papel y hacia dentro. El otro vale también $4 \cdot 10^{-5}$ weber/m^2 dirigido también normalmente al papel y hacia dentro. La intensidad del campo total B es la suma y vale: $B = 8 \cdot 10^{-5}$ wb/m^2.

Ejemplo: Fuerza por unidad de longitud entre dos conductores, rectos indefinidos recorridos por una corriente de la misma intensidad I.

Campo creado por el 1.º en un punto del 2.º:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}$$

constante en cada punto del 2.º

Fuerza sobre el 2.º:

$$F = BIl = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} Il = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2 l}{a}.$$

Si tomamos $l = 1$ m, $a = 1$ m; la corriente será de un amperio si la fuerza vale

$$F = 2\frac{\mu_0}{4\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ newton.}$$

De esta forma se define el amperio absoluto. Como esta fuerza es fácil de medir, podemos hallar el amperio absoluto y definir el columbio = = amperio × segundo; por esto el sistema de unidades que puede utilizarse es el MKSA, tomando el amperio como cuarta unidad fundamental.

Campo magnético creado por una espira. — Consideremos el campo magnético creado por una espira circular en su centro. Sea la espira representada en la figura 48 de radio R recorrida por una corriente I. Aplicando la fórmula que nos da la intensidad dB debida a un elemento de corriente en el centro O:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \operatorname{sen} \varphi}{r^2} \qquad \operatorname{sen} \varphi = 1 \qquad r = R \qquad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

(podemos integrar el módulo, pues todos los $\vec{dB}$ tienen la misma dirección).

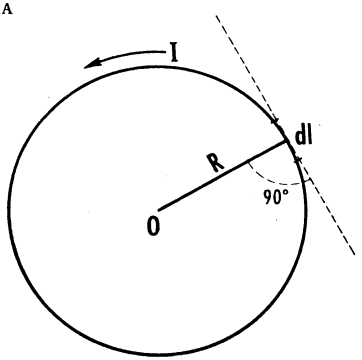


FIG. 48

Como todos los vectores $\vec{dB}$ son perpendiculares al plano de la espira, $\vec{B}$ también lo es. Para conocer el sentido de $\vec{B}$ aplicamos la regla del sacacorchos: girando un sacacorchos en el sentido de la corriente avanza en el sentido de $\vec{B}$.

Problema: ¿Cuál ha de ser la intensidad de la corriente que, circulando por una espira de 1 cm de radio, cree en el centro de la misma un campo de intensidad 1 gauss?

$$B = 1 \text{ gauss} = 10^{-4} \text{ wb/m}^2$$

$$10^{-4} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \frac{I}{0{,}01}; \qquad I = \frac{5}{\pi} A = 1{,}592 \text{ amperios.}$$

Si queremos el campo en un punto P sobre el eje de la espira y distante h del plano determinado por ella (fig. 49), aplicaremos la fórmula

$$B = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y en el caso particular en que $h = 0$ estamos en el caso anterior.

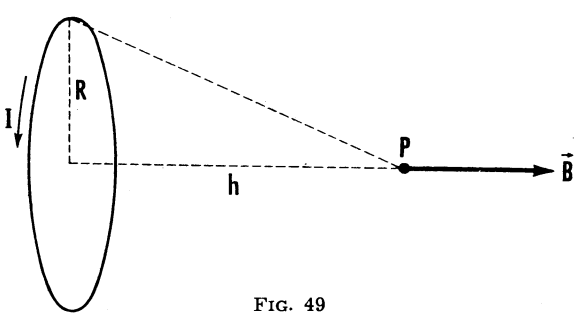


FIG. 49

Campo creado por un solenoide recto y uno circular. — El campo magnético creado por un solenoide recto de gran longitud comparada con el diámetro de su sección vale (siendo N el número de espiras y l la longitud):

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} = \mu_0 nI;$$

siendo $n = \frac{N}{l}$ el número de espiras por unidad de longitud.

El campo en el interior es homogéneo, tiene la dirección del eje del solenoide y el sentido lo podemos hallar aplicando la regla del sacacorchos: Si giramos un sacacorchos en el sentido de la corriente avanza en el sentido del campo (fig. 50).

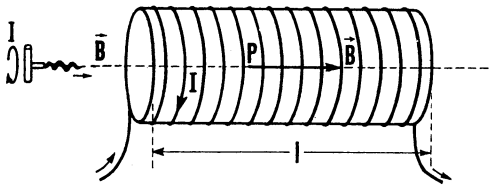


FIG. 50

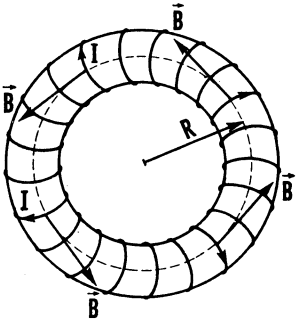


FIG 51

Si el solenoide es circular de radio medio R y de N espiras (fig. 51), la intensidad del campo en su interior es de módulo constante y vale:

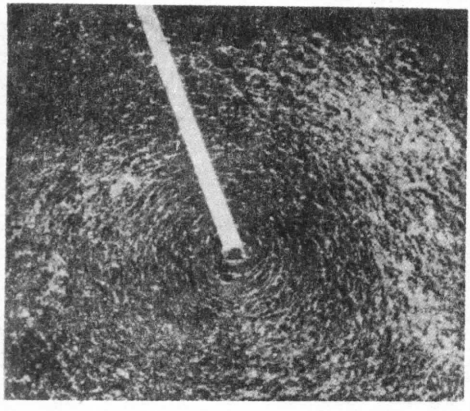
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{R} = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

siendo ahora $l = 2\pi R$ (longitud de la circunferencia media), su dirección es tangente a la circunferencia media y el sentido lo mismo que en el solenoide recto el dado por la regla del sacacorchos.

Problema: Un solenoide recto de 200 espiras por centímetro, está recorrido por una corriente de 10 amperios. ¿Cuál es la intensidad del campo en su interior?

$$n = \frac{N}{l} = 20\,000 \text{ espiras/m}$$

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20\,000 \cdot 10 = 8\pi \cdot 10^{-2} = 0{,}08\pi \text{ wb/m}^2$$

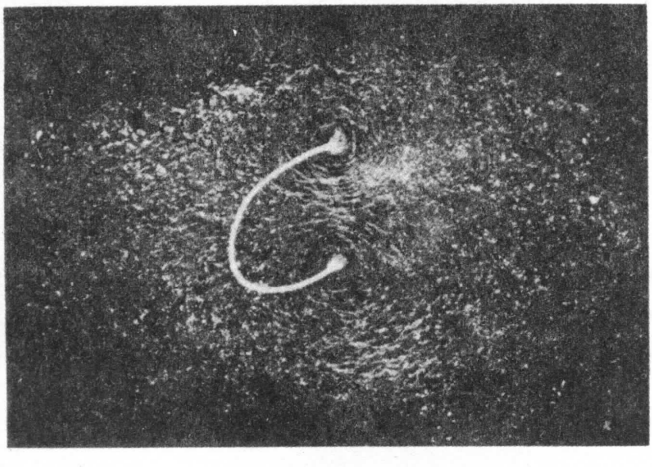


Líneas de fuerza del campo magnético creado por un hilo recto recorrido por una corriente *(intensidad =17 amperios)*.

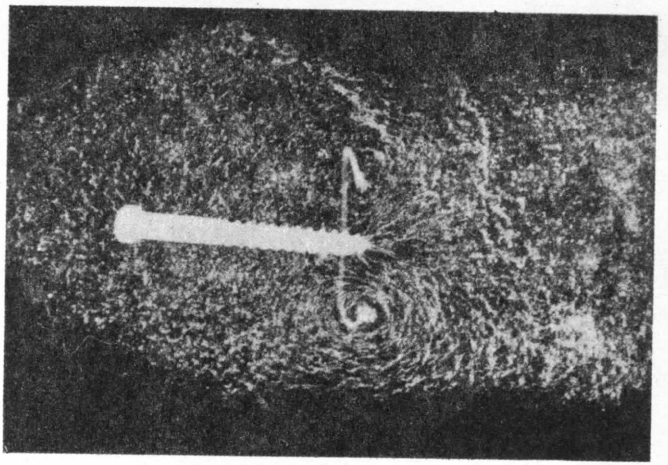
PRÁCTICAS

Materialización en modelos bidimensionales de campos magnéticos. — Coloquemos una cartulina encima de un imán, espolvoreando con limaduras de hierro observaremos las líneas de fuerza materializadas por la orientación de las limaduras, la cual se favorece golpeando ligeramente dicha cartulina. Para materializar las líneas de fuerza del campo magnético creado por una corriente, atravesamos la cartulina con un hilo o espira recorrida por una corriente eléctrica.

Si queremos conservar dicha materialización, sustituimos la cartulina por papel fotográfico de copia. Operando como antes a oscuras (o con una luz roja), encendemos un momento una bombilla, revelamos y, fijando el citado papel, nos quedarán en negativo las líneas de fuerza. De esta forma el autor ha obtenido las fotografías que ilustran esta página y la siguiente.



Líneas de fuerza del campo magnético creado por una espira circular recorrida por una corriente (intensidad =17 amperios)



Perturbación en las líneas de fuerza de la fotografía anterior al introducir un objeto de hierro.

Medida de B en un entrehierro utilizando el galvanómetro balístico. — Colocamos en el centro del entrehierro una pequeña bobina plana de N espiras, cuya sección es S. Conectamos la bobina a un galvanómetro balístico (fig. 52). Al sacar bruscamente la bobina del entrehierro observaremos una desviación α en el galvanómetro.

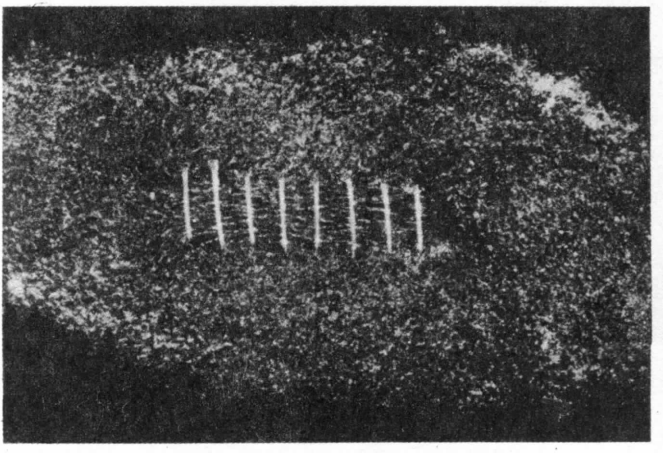
Según se sabe, la fuerza electromotriz inducida vale:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \qquad Q = \int i dt = \frac{-1}{R}\Delta\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

(siendo R la resistencia total del circuito).

Como al sacar la bobina el flujo pasa de Φ a 0, la variación de flujo

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi = NBS.$$



Líneas de fuerza de un solenoide de espiras separadas. El campo en su interior es homogéneo (intensidad de la corriente=4 amperios)

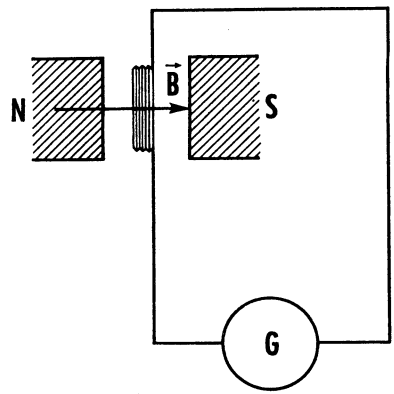


FIG. 52

Las cargas eléctricas Q que han circulado por el galvanómetro valen:

$$Q = \frac{NBS}{R}$$

y según vimos en el cap. XV, la desviación es proporcional a la carga

$$\alpha = KQ = K\,\frac{NBS}{R}$$

(R = resistencia del galvanómetro más la de la bobina). El valor de K lo hallamos experimentalmente operando como en la práctica del capítulo XV, correspondiente a la comparación de capacidades con el galvanómetro balístico. Descargamos a través del galvanómetro un condensador de capacidad conocida C cargado previamente con una pila de fuerza electromotriz conocida $\mathcal{E}$. Sabemos que se verifica

$$\alpha_0 = KQ = K \cdot C \cdot \mathcal{E}$$

de aquí despejamos K:

$$K = \frac{\alpha_0}{C\mathcal{E}}$$

Conociendo K podemos calcular el valor de B despejando de la fórmula dada anteriormente:

$$B = \frac{\alpha R}{KNS} = \frac{\alpha R}{\frac{\alpha_0}{C\mathcal{E}}\,NS} = \frac{\alpha RC\,\mathcal{E}}{\alpha_0\,NS}.$$

Si el galvanómetro realiza las oscilaciones muy amortiguadas, se puede poner en serie una resistencia conocida (véase cap. XXI, resistencia crítica de un galvanómetro), la cual tendremos en cuenta al utilizar R en la fórmula anterior.

Ejemplo: Queremos medir B en el entrehierro de un imán de herradura. Colocamos en el centro de dicho entrehierro una pequeña bobina plana de 100 espiras y 1 cm^2 de sección. La conectamos a un galvanómetro balístico. La resistencia del galvanómetro es de 200 Ω y la de la bobina 100 Ω (luego $R = 300\ \Omega$). Al retirar la bobina bruscamente del entrehierro se observa en el galvanómetro una desviación de 190 divisiones.

Primero hallaremos la constante K del galvanómetro. Conectamos como indicamos en la práctica del capítulo XV una pila de fuerza electromotriz conocida, por ejemplo, una pila Weston, de fuerza electromotriz 1,0183 V, a un condensador de $C = 1\ \mu F$. Al descargar el condensador, la desviación en el galvanómetro es de 9,5 divisiones. Se repite la descarga y se comprueba que las desviaciones sucesivas son: 9,5, - 9,6, - 9,4, - 9,5. El promedio es 9,5. El valor de

$$K = \frac{\alpha_0}{C\mathscr{E}} = \frac{9{,}5}{10^{-6} \cdot 1{,}0183} = \frac{9{,}5}{1{,}0183} \cdot 10^6$$

Vamos a calcular B:

$$B = \frac{190 \cdot 300}{\frac{9{,}5}{1{,}0183} \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-2}} = \frac{5{,}7 \cdot 1{,}0183}{9{,}5} \cdot 10^{-3} = 6{,}11 \cdot 10^{-3}\ \text{wb/m}^2$$

CUESTIONES

1. *¿Cómo podemos averiguar si una partícula móvil está cargada?*

2. *¿Cómo podemos averiguar si por un hilo circula una corriente por medios magnéticos?*

3. *¿Cómo averiguaremos el sentido de una corriente?*

4. *Dos hilos rectos recorridos por corrientes se atraen o repelen según el sentido de las corrientes. ¿Cuál debe ser el sentido en ellas para que haya atracción o repulsión?*

5. *En el entrehierro de un electroimán colocamos verticalmente un conductor rectilíneo recorrido por una corriente. ¿Qué ocurre?*

6. *Colocamos un disco metálico ligero, que puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro, en un campo magnético paralelo al eje y con un borde sumergido en mercurio (rueda de Barlow). Si hacemos circular una corriente del eje al mercurio la rueda gira. ¿Por qué?*

7. *Si en la rueda anterior invertimos el sentido de la corriente, gira en sentido contrario. ¿Por qué? Si invertimos simultáneamente el sentido de la corriente y el del campo magnético, ¿en qué sentido girará la rueda?*

8. *Dos espiras recorridas por una corriente del mismo sentido se atraen. ¿por qué?*

9. *En los extremos de dos varillas conductoras horizontales conectamos una pila. Cerramos el circuito con un trozo de alambre que se apoya sobre dichas varillas. El alambre tiende a moverse. ¿Por qué?*

10. Dentro de un gran solenoide colocamos un pequeño solenoide suspendido de un hilo. Si hacemos circular una corriente en cada uno de ellos, ¿qué ocurre?

11. Para medir el campo magnético en el entrehierro, cuando B es débil, ¿qué tipo de bobina utilizaremos si el galvanómetro de que disponemos no es muy sensible?

PROBLEMAS

1. Un electrón ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) se mueve con una velocidad de 2000 km/segundo en un campo magnético perpendicular a su trayectoria que vale 10 wb/m². ¿Cuál es la fuerza que se ejerce sobre dicho electrón?

2. Un hilo recto recorrido por una corriente de 20 amperios se coloca normalmente a un campo magnético uniforme de intensidad 2 wb/m². Determinar la fuerza por metro de conductor.

3. Una espira de 2 cm de radio recorrida por una corriente de 10 amperios se coloca en un campo magnético uniforme de intensidad 0,5 wb/m² y que forma un ángulo de 30° con la normal al plano de la espira. Calcular: 1.º, momento magnético de la espira; 2.º, momento del par de fuerzas a que se halla sometida la espira.

4. Una espira rectangular de 20 cm de base y 40 cm de altura recorrida por una corriente de 5 amperios está situada en un campo magnético uniforme de intensidad 0,1 wb/m² de dirección paralela al plano del cuadro. ¿Cuál es el momento del par de fuerzas a que se halla sometida dicha espira?

5. Un solenoide tiene 100 espiras, cuyo radio es de 20 cm, está recorrido por una corriente de 2 amperios. Colocado en un campo magnético uniforme, está sometido a un par de fuerzas de momento 0,2 newton·m cuando el eje del solenoide forma 30° con la dirección del campo. Determinar el momento magnético de dicho solenoide y la intensidad del citado campo magnético.

6. Un electrón marcha a 30 km/segundo. Determinar la intensidad del campo magnético creado en un punto situado a 1 mm de su trayectoria cuando el electrón pasa frente a dicho punto.

7. Un electrón que se desplaza con una velocidad de 10 000 km/segundo se dirige perpendicularmente a un hilo recto indefinido. Determinar la fuerza que se ejerce sobre él cuando dista 2 cm del hilo si la intensidad de la corriente en el hilo es de 20 amperios.

8. Por un hilo recto, supuesto indefinido, circula una corriente de 12 A. Determinar la intensidad del campo magnético en un punto situado a 2 cm de dicho hilo.

9. Un electrón marcha a 1000 km/segundo. Determinar la fuerza magnética ejercida sobre otro electrón que se mueva a la misma velocidad en una trayectoria perpendicular a la del anterior al pasar uno frente a otro a una distancia de 0,1 mm.

10. Determinar la intensidad del campo magnético en el interior de un solenoide de 20 espiras por centímetro al ser recorrido por una corriente de intensidad 2,5 amperios.

11. Dentro del solenoide anterior colocamos otro más pequeño recorrido por una corriente de 0,5 amperios que tiene 200 espiras y 10 cm² de sección. Determinar el momento del par de fuerzas a que se halla sometido el solenoide pequeño cuando sus ejes forman un ángulo de 45°.

12. Un solenoide circular de 400 espiras y radio medio 20 cm está recorrido por una corriente de 1,5 amperios. Determinar la intensidad del campo en el interior.

CAPÍTULO XIX

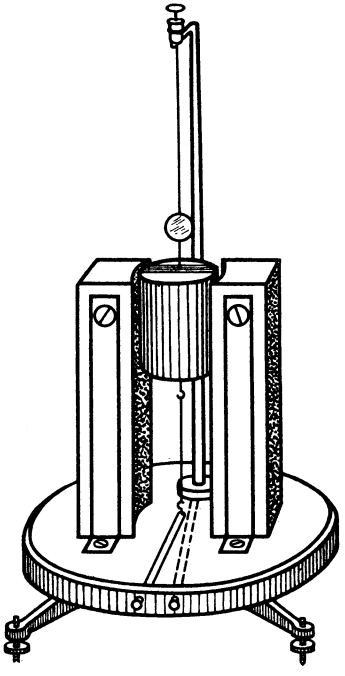
INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Galvanómetros. — El aparato fundamental para la medida de corrientes eléctricas es el galvanómetro de cuadro móvil. Se basa en el efecto electromagnético entre corrientes e imanes.

Consta de un cuadro formado por cierto número de espiras arrolladas sobre un cilindro de hierro (fig. 55, *a*). Colocamos el cuadro en el entrehierro de un imán permanente. Debido a la forma del entrehierro y al cilindro de hierro, el campo en el cuadro es radial (las líneas de fuerza son paralelas al plano del cuadro). Este cuadro lo suspendemos por medio de un hilo de torsión. Si hacemos circular por el cuadro una intensidad I, el cuadro tiende a girar por estar sometido a un par cuyo momento vale $P = NISB$ sen φ. Siendo φ el ángulo que forma $\vec{B}$ con el eje del cuadro, que según lo dicho antes será de 90°. Por lo tanto, $P = NISB$. Debido a la torsión del hilo, existe un par de torsión cuyo momento es proporcional al ángulo girado y se opone al giro del cuadro. Cuando el momento del par de torsión $C\alpha$ es igual al momento P, tendremos equilibrio. El cuadro queda en una posición de equilibrio formando un ángulo α con su posición inicial, que lo podemos conocer despejando de la relación

$$C \cdot \alpha = NISB; \qquad \alpha = \frac{NSB}{C} I = K_1 I$$

Es decir, el ángulo girado es proporcional a la intensidad de la corriente que cir-



Galvanómetro de Deprez-d'Arsonval

cula por el cuadro. Despejando I tenemos $I = \frac{1}{K_1}\alpha$; la intensidad es proporcional al ángulo girado. A la constante K_1 le llamamos constante permanente del galvanómetro de cuadro móvil. Se mide en rad/A. Con este galvanómetro se pueden medir intensidades del orden de 10^{-11} A. (Si deseamos medir intensidades mayores, colocaremos un shunt adecuado en paralelo con el cuadro del galvanómetro.)

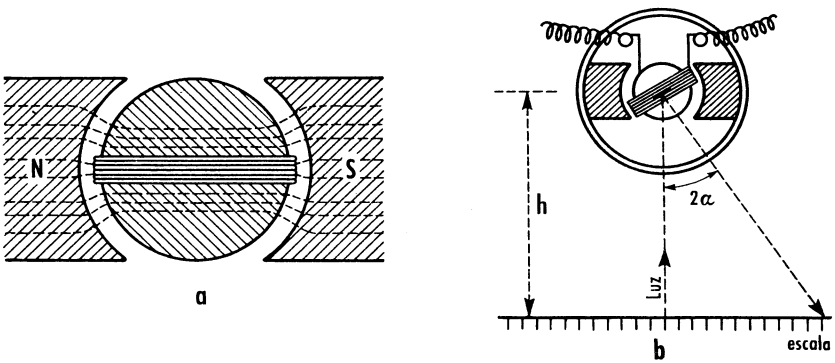


FIG. 55

Para medir el ángulo se manda un rayo de luz (fig. 55, *b*) que al incidir sobre un pequeño espejo colocado en el hilo de torsión cerca del cuadro se refleja y nos da la imagen sobre una escala graduada situada a cierta distancia del galvanómetro. Variando esta distancia podemos variar la sensibilidad. La longitud recorrida en la escala por la imagen reflejada en el espejo vale $x = h \cdot \text{tg } 2\alpha$ (ya que si el espejo gira α la imagen gira 2α), siendo h la distancia de la escala al galvanómetro. Si el ángulo es pequeño, puede tomarse $x = h \cdot 2\alpha$. Las indicaciones del galvanómetro nos proporcionan una manera de medir pequeñas intensidades, para lo cual debemos conocer la constante permanente y así conoceremos la intensidad correspondiente a cada desviación.

Según la resistencia total del circuito (la interna del cuadro y la exterior), las oscilaciones son periódicas o aperiódicas; es decir, o se alcanza la posición de equilibrio después de haber efectuado muchas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio, o llega a esta posición lentamente hasta que se detiene. El valor de la resistencia a partir de la cual las oscilaciones son periódicas se llama resistencia crítica, por encima de la cual son periódicas y por debajo de la cual son aperiódicas.

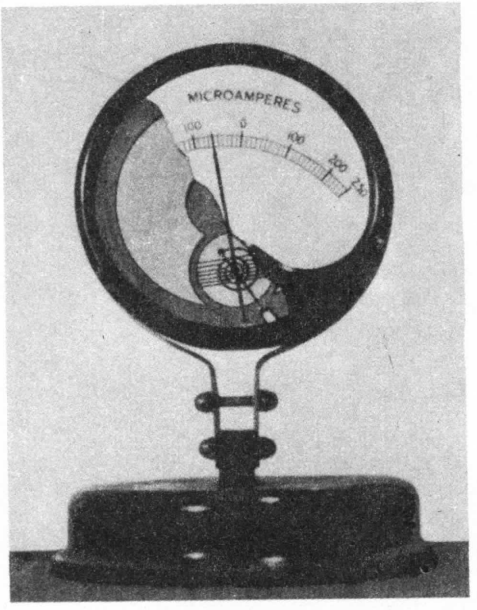
GALVANÓMETRO BALÍSTICO. — Es un galvanómetro de cuadro móvil utilizado para fines especiales.

Si hacemos circular por el cuadro móvil una carga eléctrica durante

un intervalo de tiempo muy corto, de forma que el cuadro empieza a girar cuando ya ha circulado toda la carga, el cuadro sufre un impulso, llega a una desviación máxima y regresa a su posición de partida. Se demuestra que la máxima desviación es proporcional a la carga que ha circulado por el cuadro: $\alpha_m = KQ$.

A la constante K se le llama constante balística del galvanómetro. En realidad, para que un galvanómetro pueda considerarse como balístico, la parte móvil debe poseer un momento de inercia relativamente grande. De este modo habrá circulado toda la carga antes de iniciarse el movimiento. (Su movimiento será suficientemente lento, pues la aceleración angular es inversamente proporcional al momento de inercia.) En algunos modelos de galvanómetro, cuando se quiere utilizar como balístico se suspende del cuadro móvil una pequeña pesa que aumenta el momento de inercia. En las prácticas hemos estudiado algunas de las aplicaciones de este tipo de galvanómetro.

Amperímetros y voltímetros. — Los amperímetros de cuadro móvil son en esencia un galvanómetro de cuadro móvil, menos sensible, en el cual la indicación de la desviación del cuadro se hace por medio de una aguja que se mueve frente a una escala graduada. Las divisiones de la escala nos dan directamente la intensidad en submúltiplos de amperio. Si que-



Sección parcial de un microamperímetro de cuadro móvil.

remos utilizarlo para intensidades más elevadas colocaremos un shunt. En los amperímetros industriales se sustituye el hilo de torsión por un muelle en espiral que nos proporciona el par que equilibra el par electromagnético.

Para transformar un amperímetro en voltímetro se coloca en serie con el cuadro una resistencia elevada (depende de la escala que se quiera utilizar). La diferencia de potencial entre los bornes del voltímetro será el producto de la intensidad que nos indica el amperímetro por la resistencia (suma de la interna del amperímetro más la que hemos colocado en serie).

Ejemplo. Tenemos un microamperímetro en el cual cada división equivale a una intensidad de 1 microamperio. Queremos transformarlo en voltímetro de forma que cada división equivalga a 1 voltio. Siendo la resistencia interna del microamperímetro de 200 ohmios, determinar la resistencia que debemos colocar en serie con el amperímetro.

$$V_1 - V_2 = I(R + r) \qquad 1 = 10^{-6}(R + 200) \qquad R + 200 = 10^6 \qquad R = 999\,800\ \Omega$$

AMPERÍMETROS TÉRMICOS. — Existen los amperímetros (y por lo tanto también voltímetros) llamados térmicos; su fundamento es que un hilo recorrido por una corriente se calienta por efecto Joule y por tanto sufre una dilatación (fig. 56).

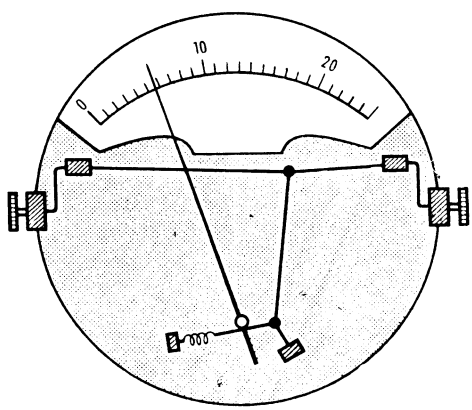


FIG. 56

Tomamos un hilo sujeto por sus extremos que con un artificio adecuado puede mover una aguja indicadora. Al dilatarse el hilo mueve la aguja que se desplaza frente a una escala. Al cesar la corriente el hilo se contrae y la aguja se desplaza en sentido contrario hasta la posición cero. Podemos graduarlo y tenemos un amperímetro. Este tipo de amperímetro lo mismo sirve para la medida de corrientes continuas que para el valor eficaz de la intensidad de las corrientes alternas.

AMPERÍMETROS DE HIERRO MÓVIL. — Constan de una bobina fija, dentro de la cual hay una chapa de hierro y frente a ella otra delgada chapa, también de hierro dulce, solidaria de la aguja indicadora del aparato. Al circular la corriente, la excitación magnética produce una imanación en las dos chapas de hierro, imanación que es del mismo signo y por lo tanto estas dos chapas se repelen. La móvil, solidaria de la aguja, al desplazarse nos da una desviación indicada por el desplazamiento de la aguja sobre la escala que depende de la excitación magnética de la bobina y, por lo tanto, de la intensidad de la corriente. Esta desviación no es rigurosamente proporcional a la intensidad, según sabemos de las propiedades de los cuerpos ferromagnéticos. Así pues, la escala debe calibrarse y observaremos que las divisiones no están igualmente separadas al principio que al final de la escala. Debido a la saturación del hierro, al final de la escala (a mayor intensidad) las divisiones están más próximas.

La aguja lleva una espiral para regresar a su posición inicial cuando no circula corriente. El extremo de la aguja lleva una pieza ligera metálica, que se mueve dentro de un espacio cerrado, para amortiguar su movimiento.

Estos aparatos no son muy precisos, pero son muy utilizados, pues lo sencillo de su construcción hace que su precio sea muy inferior a los de cuadro móvil. Otra ventaja es que la desviación de la aguja es independiente del sentido de la corriente, pues las dos chapas se imanan del mismo signo y hay siempre repulsión, cualquiera que sea el sentido de la corriente. Sirven, pues, para corriente continua y para corriente alterna.

CUESTIONES

1. *¿Aumentaríamos la sensibilidad de un galvanómetro aumentando la intensidad del campo magnético en el plano del cuadro?*

2. *Si varias espiras del cuadro hiciesen contacto entre sí, ¿variaría la sensibilidad?*

3. *¿Cómo podemos calibrar un galvanómetro de cuadro móvil y hallar su constante permanente disponiendo de una pila patrón y una caja de resistencias, conociendo las resistencias internas del galvanómetro y la de la pila?*

4. *Colgando una pesa del cuadro móvil de un galvanómetro balístico, ¿variamos su sensibilidad?*

5. *¿Cómo transformamos un galvanómetro de cuadro móvil de periódico en aperiódico?*

6. *¿Podríamos usar un galvanómetro como amperímetro?*

7. *¿Cómo podríamos transformar un galvanómetro en voltímetro?*

8. *¿Cómo podríamos lograr un amperímetro o voltímetro de varias escalas disponiendo de un galvanómetro y cajas de resistencias?*

9. ¿Por qué es deseable que un voltímetro tenga gran resistencia interna y poca el amperímetro?

10. Si invertimos el sentido de la corriente en un amperímetro de cuadro móvil, se invierte el sentido de giro de la aguja. ¿Por qué?

11. ¿Podemos conocer la polaridad de unos bornes con un aparato de medida de cuadro móvil?

12. Las indicaciones de un amperímetro térmico son independientes del sentido de la corriente. ¿Por qué? ¿Qué utilidad reporta este hecho?

PROBLEMAS

1. El cuadro móvil de un galvanómetro tiene 200 espiras, su superficie es de 6 cm^2, colocado en un campo magnético constante de 2 wb/m^2 paralelo al plano de la espira; si la intensidad de la corriente es el cuadro igual a 1 miliamperio. ¿Cuál es el momento del par de fuerzas al cual está sometido?

2. El cuadro móvil del galvanómetro anterior está suspendido de un hilo cuya constante de torsión vale $C=2\cdot10^{-6}$ new·m/rad. Determinar el ángulo girado por el cuadro cuando circula por él una corriente cuya intensidad es de un microamperio.

3. Determinar la constante permanente del galvanómetro del problema anterior.

4. Si la escala dista un metro del cuadro móvil del galvanómetro del problema número 2, determinar la longitud de escala recorrida por la imagen reflejada en el espejo del cuadro móvil cuando circula por dicho cuadro una corriente de intensidad igual a un microamperio.

5. Siendo la resistencia interna del galvanómetro del problema anterior 200 ohmios, determinar la resistencia de un shunt para poder transformar el galvanómetro en amperímetro, de forma que, con una corriente total de 1 microamperio, el cuadro sólo gire 3 grados.

6. Un miliamperímetro de resistencia interna 1,5 ohmios se quiere transformar en voltímetro que indique 1 voltio por división. ¿Qué resistencia debemos colocar en serie?

7. Con un voltímetro de resistencia interna 10 000 ohmios medimos la fuerza electromotriz de una pila de 10 Ω de resistencia interna. Si tomamos como fuerza electromotriz el valor leído en el voltímetro, de la diferencia de potencial en bornes de la pila, ¿qué error relativo cometemos?

8. Queremos determinar la resistencia de una bombilla conectando un voltímetro en paralelo con la lámpara y un amperímetro en serie con el conjunto. La indicación del voltímetro es de 100 V y la del amperímetro 0,8 A. La resistencia interna del voltímetro es de 10 000 ohmios. Determinar el valor de la resistencia y el error cometido si la hubiésemos calculado por el cociente entre la indicación del voltímetro y la del amperímetro.

9. El imán permanente de un galvanómetro de cuadro móvil se desimana continua y lentamente, de forma que en un año la intensidad del campo magnético ha disminuido en un 0,2 %. ¿Cuál será la variación relativa de la constante permanente en un año?

10. Para compensar la disminución de la sensibilidad del galvanómetro del problema anterior separamos la escala del galvanómetro. ¿Cuál debe ser el aumento relativo de la distancia para que las divisiones en la escala correspondan a las mismas intensidades que antes de desimanarse dicho imán? (Se suponen ángulos pequeños.)

CUARTA PARTE

OPTICA

CAPÍTULO XX

PROPAGACIÓN, REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE LA LUZ

Propagación rectilínea de la luz. — Para el estudio de la óptica geométrica podemos partir del principio de que la luz se propaga en línea recta en un medio homogéneo e isótropo. Si disponemos de un foco luminoso puntiforme, interponiendo entre él y una pantalla un objeto opaco, obtendremos una sombra sobre dicha pantalla. Esta sombra coincide con la proyección sobre la misma del objeto, tomando como centro de proyección el punto donde está el foco luminoso. Los radios de proyección coinciden con los llamados *rayos luminosos* tangentes al contorno del objeto. Dichos rayos representan, pues, las direcciones de propagación de la luz, y para las necesidades de la óptica geométrica los representaremos de manera gráfica por medio de líneas rectas. En definitiva, el rayo no es más que una abstracción geométrica para representar una dirección en que se propaga la luz.

En el caso de la sombra, antes citado, el conjunto de rayos tangentes al contorno nos limita un cono, de vértice el punto donde está el foco, que constituye un haz de rayos. Si el foco estuviese en el infinito, el haz sería de rayos paralelos.

Un punto luminoso emite luz en todas direcciones. Si limitamos su propagación, por medio de un cuerpo opaco con un orificio, obtenemos un haz de rayos. Si el haz es muy fino puede considerarse como un rayo, aunque la realización práctica de un rayo es imposible, debido a fenómenos que se presentan al atravesar la luz un orificio muy pequeño.

Velocidad de propagación. — La luz se propaga en el vacío con una velocidad que es la máxima conocida en el mundo físico. Su valor es aproximadamente de 300 000 km/s. El primero que determinó la velocidad de la luz fue el astrónomo Römer, al tener en cuenta el adelanto o retraso de los eclipses de los satélites de Júpiter según que el citado planeta estuviera mas cerca o más lejos de la Tierra, debido a que la luz recorre mayor camino en el segundo caso que en el primero, y por tanto el eclipse se observaba más tarde que en el primero. Por este método encontró que el valor de la velocidad de la luz debía ser de $2{,}98 \cdot 10^8$ m/s. La primera

medida terrestre fue efectuada por Fizeau a mediados del pasado siglo. Su método consistía en hacer pasar la luz por entre dos dientes de una rueda dentada, en la cual los dientes eran iguales a los huecos. Después de pasar por entre los dientes se reflejaba en un espejo y volvía hacia la rueda. Si la rueda gira, para que veamos luz, el tiempo transcurrido entre la ida y vuelta de la luz debe coincidir con el tiempo empleado por la rueda en girar un ángulo correspondiente a un diente o un múltiplo de este tiempo. Haciendo girar la rueda a una velocidad creciente llegará un momento en que veremos la luz, y lo mismo ocurriría si girase a velocidades múltiplos de ésta. Siendo conocidos el camino seguido por la luz y el tiempo transcurrido en recorrer la rueda un ángulo correspondiente a un diente, podemos hallar la velocidad. Sea n el número de dientes, N el número de vueltas por segundo, y d la distancia de la rueda al espejo; tenemos: camino seguido por la luz, $e = 2d$; tiempo transcurrido, $t = \frac{1}{nN}$; velocidad de la luz, $c = \frac{2d}{\frac{1}{nN}} = 2nNd$.

El valor hallado por Fizeau fue: $c = 3{,}13 \cdot 10^8$ m/s.

Posteriormente Foucault utilizó un método basado en un espejo giratorio; dicho método, perfeccionado por Michelson, ha servido para poder calcular la velocidad de la luz con un error inferior a 4 km/s.

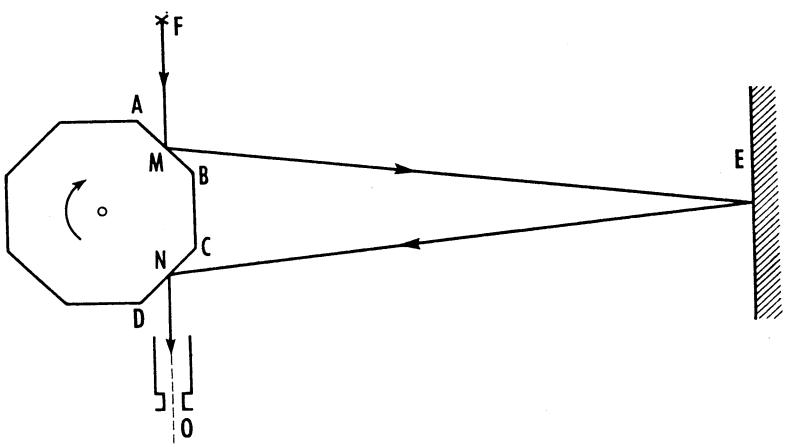


FIG. 57

El método, en esencia, consiste en lo siguiente: un foco luminoso F manda un rayo sobre un espejo octogonal (fig. 57). Incide sobre la cara AB y, al reflejarse, sigue el camino ME; siendo E un espejo, se refleja siguiendo el camino EN, vuelve a reflejarse en la cara CD y se observa con

el anteojo O. Al girar el espejo octogonal, la luz se recibe en el anteojo si el tiempo invertido en la ida y vuelta es igual al tiempo empleado por el espejo en girar un octavo de vuelta, o un múltiplo de este tiempo. Sea N el número de revoluciones por segundo del espejo, d la distancia $ME = EN$; el tiempo empleado por la luz en recorrer el camino de ida y vuelta es $2d$ (el espejo E estaba a 35,4 km). El tiempo necesario para que el espejo gire un octavo de vuelta vale $1/8N$. Igualando los tiempos $\frac{1}{8N} = \frac{2d}{c}$ y despejando c tendremos: $c = 16Nd$.

El valor hallado (reducido al vacío) fue $C = 299\,796$ km/s.

Más adelante, los colaboradores de Michelson midieron la propagación de la luz dentro de un tubo de 1,5 km de largo, donde se había practicado el vacío, y encontraron el valor $c = 299\,774$ km/s.

En 1941, Anderson, utilizando un método distinto, halló el valor de $c = 299\,776$ km/s. Para usos prácticos puede tomarse dicha velocidad $c = 300\,000$ km/s.

Índice absoluto de refracción. — La luz se propaga en los medios materiales con distinta velocidad que en el vacío. La relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad en un medio se llama índice de refracción absoluto de dicho medio. Siendo la velocidad v en un medio material inferior a la velocidad en el vacío, el índice de refracción es siempre mayor que la unidad. Escribiremos $n = \frac{c}{v}$, indicando por n el índice de refracción absoluto y v la velocidad de propagación en el medio considerado.

El índice de refracción depende de la longitud de onda de la luz (la luz blanca es mezcla de radiaciones de distinta longitud de onda) y también depende de la temperatura, especialmente para los fluidos. Generalmente se da dicho índice para la luz amarilla de sodio ($\lambda = 5800$ Å)* y si se trata de un fluido se indica la temperatura. A continuación damos una tabla con índices de refracción relativos al aire de algunas sustancias:

Líquidos (a 20°C)		Sólidos	
Aceite de cedro	1,515	Hielo	1,32
Acetona	1,359	Ámbar	1,546
Alcohol etílico	1,361	Ácido bórico	1,463
Alcohol metílico	1,329	Alcanfor	1,532
Benceno	1,501	Bálsamo del Canadá	1,530
Bromo	1,654	Diamante	2,417
Cloroformo	1,446	Vidrio de cuarzo	1,46
Glicerina	1,494	Vidrio crown ligero	1,515
Monobromuro de naftalina	1,658	Vidrio crown pesado	1,615
		Vidrio flint ligero	1,608
		Vidrio flint pesado	1.771

* 1 Å = 10^{-10} m.

Índice de refracción absoluto de algunos gases en condiciones normales.

Aire	1,000292
Argón	1,000281
Helio	1,000036
Hidrógeno	1,000132
Oxígeno	1,000272

Índice de refracción relativo al aire del agua a distintas temperaturas

t °C		t °C	
15°	1,3334	35°	1,3312
20°	1,3329	40°	1,3305
25°	1,3325	50°	1,3289
30°	1,3319	100°	1,3178

Reflexión y refracción de una onda plana en una superficie plana. — Supongamos una onda plana, o bien un haz de rayos paralelos (que es lo mismo). Si esta onda incide sobre una superficie plana (superficie del agua, cara de cristal, etc.), parte de la luz penetra en el segundo medio y parte permanece en el primer medio. La fracción de luz que penetra en el segundo medio depende de la transparencia de éste; puede darse el caso (espejo) de que prácticamente toda la luz permanezca en el primer medio. Si la incidencia no es normal, hay un cambio de dirección en los rayos del haz. A los rayos que permanecen en el primer medio se les llama rayos reflejados, y al fenómeno reflexión de dichos rayos o de la onda incidente. A los rayos que penetran en el segundo medio se les llama rayos refractados, y al fenómeno refracción de dichos rayos o de la onda incidente.

Cuando la luz se propaga por un medio, va a una velocidad que es igual (según hemos visto en la definición de índice absoluto de refracción) al cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y el índice absoluto de refracción. De aquí deducimos que, cuanto mayor sea el índice citado, mayor será el tiempo empleado para recorrer la luz un mismo camino. Fermat enunció un principio relativo al tiempo empleado para ir la luz de un punto a otro, que dice:

La trayectoria seguida por la luz para ir de un punto a otro es tal, que el tiempo empleado es máximo o mínimo (o bien que la duración del trayecto sea un máximo o un mínimo). Supongamos que, para ir de un punto a otro, la luz debe recorrer distintos medios. El tiempo empleado será

$$t = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \ldots = \frac{1}{c}(n_1 d_1 + n_2 d_2 + \ldots)$$

siendo d_1, d_2, ... los caminos seguidos en cada medio, y n_1, n_2, ... los respectivos índices de refracción. Como c es constante, para que t sea máximo o mínimo debe serlo $n_1 d_1 + n_2 d_2 + \ldots$ A la suma $\sum_1^i n_i d_i$ se le llama *camino óptico*. El principio de Fermat puede enunciarse: el camino seguido

por la luz para ir de un punto a otro es aquel cuya longitud óptica sea un máximo o un mínimo.

Leyes de la reflexión y de la refracción. — REFLEXIÓN. Supongamos el rayo AO que incide sobre la superficie S y se refleja (fig. 58); sea OB el rayo reflejado; para ir la luz de A a B debe seguir un camino óptico

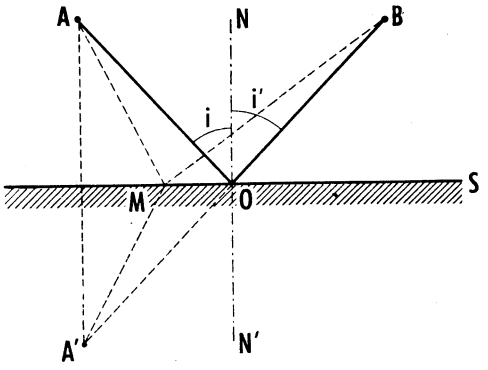


FIG. 58

máximo o mínimo. En este caso, por estar los rayos en un mismo medio, basta que lo sea el camino geométrico AOB. Tracemos el punto A' simétrico de A respecto al plano S. Uniendo A' con B corta a S en el punto O que está en el mismo plano que A, B y la normal, y se verifica $AO + OB = A'O + OB = A'B$. Cualquier camino (por ejemplo, AMB) es más largo que el $A'B$, ya que $AMB = A'MB > A'B$. Así pues, cumple la condición de mínimo.

Trazando la normal $N'N$ al plano en el punto O, se verifica: $\widehat{A} = i$, $\widehat{A'} = i'$; como $\widehat{A} = \widehat{A'}$, debe ser $i = i'$.

De lo anterior deducimos las leyes de la reflexión: *El rayo incidente, el reflejado y la normal están en un mismo plano* (plano de incidencia). *El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión* ($i = i'$).

REFRACCIÓN. — Supongamos una onda plana AB que se propaga en el medio 1 de índice de refracción absoluto n_1 (fig. 59). Al llegar a la superficie S de separación del medio 1 y del medio 2, de índice de refracción n_2, el rayo AM penetra en el medio 2; si $n_2 > n_1$, el rayo refractado MD marcha a velocidad menor que en el medio 1, manteniéndose en el plano de incidencia. (El rayo incidente, el refractado y la normal están en un mismo plano.) Mientras el rayo BC se propaga de C a N, el rayo AM ha

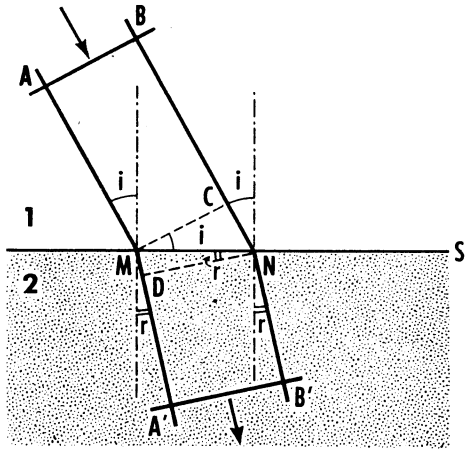


FIG. 59

recorrido el camino MD. En el triángulo MCN se verifica $CN = MN \cdot \text{sen } i$. En el MND, $MD = MN \cdot \text{sen } r$.

$$CN = v_1 \cdot t \qquad MD = v_2 \cdot t \qquad \frac{CN}{MD} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{c}{n_1} \\ v_2 &= \frac{c}{n_2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}; \qquad \text{luego:} \qquad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$$

Al cociente $\frac{}{n_1}$ se le llama índice de refracción relativo del segundo medio respecto al primero; podemos escribir $\frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$, o sea: la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es igual al cociente entre la velocidad en el primer medio y la velocidad en el segundo, o bien igual a la relación entre el índice de refracción del segundo medio respecto al primero. Si $n_2 > n_1$, el rayo refractado se aproxima a la normal. Si $n_2 < n_1$, el rayo refractado se aleja de la normal.

Podemos construir gráficamente el rayo refractado, para una incidencia determinada, conocidos los índices n_1 y n_2 (suponemos $n_2 > n_1$). Trazamos dos circunferencias de radios n_1 y n_2 (fig. 60). El rayo incidente corta a la de menor radio en B. Desde B trazamos la perpendicular a S

que corta a la segunda circunferencia en C. El rayo refractado es el OC; efectivamente:

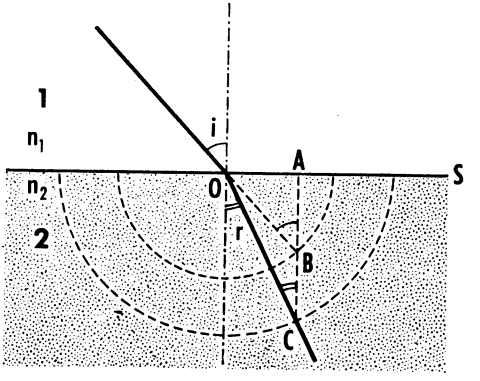


FIG. 60

$$\left.\begin{aligned} OA = OB \text{ sen } \widehat{OBA} = n_1 \text{ sen } i \\ OA = OC \text{ sen } \widehat{OCA} = n_2 \text{ sen } r \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & n_1 \text{ sen } i = n_2 \text{ sen } r \\ & \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

Es decir, cumple la ley de la refracción.

Ángulo límite y reflexión total. — Supongamos $n_1 > n_2$ (fig. 61). El rayo AO se refracta según OA', verificándose $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$; como $n_1 > n_2$,

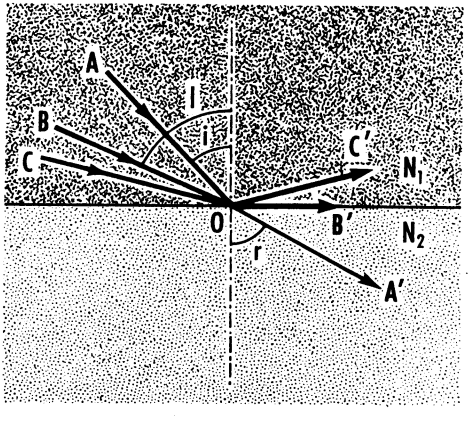


FIG. 61

sen $r >$ sen i; r es mayor que i. Si aumentamos i, aumenta r. Aumentando i llegaremos a que r sea igual a 90°; entonces se verifica $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$.

Al ángulo de incidencia que cumple esta condición se le llama *ángulo límite* l: sen $l = \frac{n_2}{n_1}$.

Aumentando el ángulo de incidencia no existe rayo refractado, y el rayo incidente se refleja. A este fenómeno se le llama *reflexión total*. Hay que tener presente que si n depende de la longitud de onda, lo mismo le ocurre al ángulo límite.

Supongamos un prisma de vidrio de sección triangular de forma que los dos ángulos α de la base sean superiores al ángulo límite (fig. 62). Al

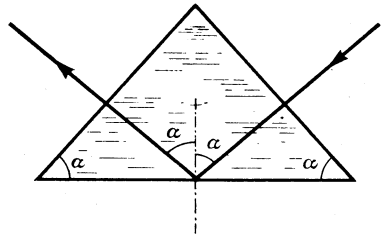


FIG. 62

incidir normalmente un haz luminoso a una de sus caras laterales, no se desvía ($i = 0$, $r = 0$). Incide en la cara que contiene a la base del triángulo con un ángulo $\alpha > l$, superior al ángulo límite y sufre la reflexión total, saliendo por la otra cara. El fenómeno de la reflexión total nos proporciona un método de medida de índices de refracción relativos (véase prácticas).

PRÁCTICAS

Comprobación experimental de las leyes de la reflexión. — Tomemos un espejo plano (fig. 63), lo colocamos verticalmente sobre una hoja de papel. Trazamos una recta en la intersección del espejo con el plano del papel EE'. Dibujemos una dirección arbitraria que corte a la recta antes dibujada en O. En un punto A de esta dirección coloquemos verticalmente un objeto delgado (un alfiler, clavo, etc.). Con una tarjeta R, en la cual hemos practicado una rendija, observamos el espejo moviendo la misma hasta que veamos el objeto. Uniendo el pie de la rendija con el punto de intersección de la dirección dibujada anteriormente con el espejo, tenemos un rayo reflejado. Trazando la normal ON al espejo en el punto de intersección citado, tenemos los ángulos

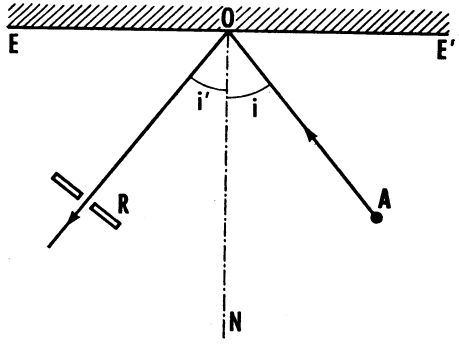


FIG. 63

de incidencia *i* y de la reflexión *i'*, los cuales pueden medirse y comprobar que son iguales. Al mismo tiempo podemos comprobar que el rayo incidente el reflejado y la normal están en un mismo plano.

Puede hacerse con un rayo solar que penetre en una habitación oscura por una rendija de la ventana. Colocando un espejo veremos la luz reflejada en una pantalla o una pared de la habitación. Colocando el espejo sobre una mesa en un papel adecuado podemos dibujar la normal. Uniendo con hilos la rendija y la imagen con el espejo, podremos dibujar los ángulos de incidencia y de reflexión comprobando que son iguales. Comprobamos, además, que los hilos y la normal están en un mismo plano.

Comprobación experimental de las leyes de la refracción. — Tomemos una lámina de vidrio gruesa (fig. 64). En una de sus caras dibujamos una señal *S*.

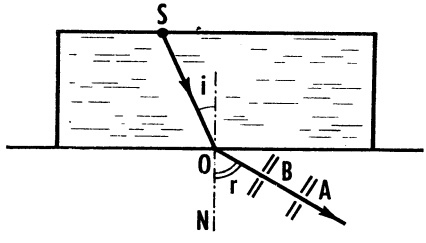


FIG. 64

Observando por la otra cara con la misma tarjeta con la rendija (citada antes), veremos la imagen de la señal que habíamos dibujado. Fijamos sobre un papel la posición de la rendija *A*. Nos acercamos o alejamos del vidrio hasta que volvemos a ver la imagen. Señalando la nueva posición *B* de la rendija, al unir con la anterior tenemos dibujado un rayo refractado. Uniendo la intersección *O* de éste con el plano del vidrio, con la señal dibujada *S* (rayo incidente), tenemos dibujados los rayos incidente *SO* y refractado *OA*. Trazando

la normal ON a la cara del vidrio en el punto de intersección de los dos rayos, podemos medir los ángulos de incidencia i y refracción r. Conociendo el índice de refracción n del vidrio respecto al aire podemos comprobar la ley de la refracción $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n$, o bien conocidos i, r, determinamos n.

Podemos utilizar un método muy simple que consiste en lo siguiente:

Tomemos una regla graduada R (fig. 65) y coloquemos perpendicularmente a ella otra H. Un foco luminoso M envía luz de forma que H proyecta una

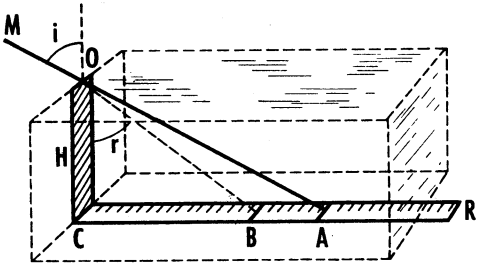


FIG. 65

sombra CA sobre la regla R. Coloquemos una lámina gruesa de vidrio encima de R cuyo plano superior coincida con el borde superior de H. El rayo de luz tangente a H se refracta y proyecta una sombra CB de H sobre R. El rayo incidente es MO y el refractado OB. Podemos variar el ángulo de incidencia moviendo H hacia M y medimos las sombras y después de colocar el vidrio pudiendo comprobar que:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n = \text{constante}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } i &= \frac{CA}{OA} = \frac{CA}{\sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{CA}^2}} \\ \text{sen } r &= \frac{CB}{OB} = \frac{CB}{\sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{CB}^2}} \end{aligned}\right\}$$

midiendo estas longitudes para varias posiciones de H, constataremos que:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \text{constante} = n$$

Comprobamos que el rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en un mismo plano, ya que la sombra se sigue proyectando sobre la regla y no se inclina respecto al plano normal que contiene a R.

Medida de un índice de refracción por reflexión total. — Tomemos un disco de corcho como flotador (fig. 66). Lo colocamos en un recipiente con un líquido colocando una varilla de madera perpendicular al disco y que pase por su centro. Vamos introduciendo la varilla de forma que mirando hacia el interior del recipiente veamos dicha varilla. Luego retiramos lentamente la varilla observando en cada caso si vemos su imagen dentro del recipiente. Llega un

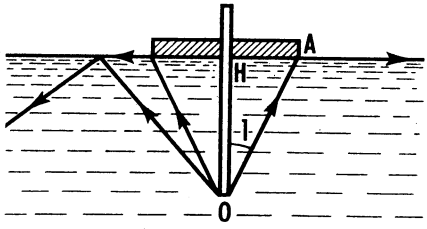


FIG. 66

momento en el cual no veremos la varilla dentro del recipiente mirando desde cualquier posición por encima de la superficie del líquido. En este caso el ángulo AOH es igual al ángulo límite. Podemos determinar dicho ángulo ya que $\text{tg } l = \frac{AH}{OH}$ (AH es el radio del disco). Conocido el ángulo l hallamos n, $n = \frac{1}{\text{sen } l}$, que es el índice de refracción del líquido respecto al aire.

Para medidas de precisión se hace con los refractómetros de Abbe o Pulfrich que se basan en la reflexión total y nos dan el índice de refracción por lectura directa y con cuatro y cinco cifras decimales respectivamente.

CAPÍTULO XXI

DIOPTRIO PLANO

Se llama sistema óptico un conjunto de medios transparentes y homogéneos separados por superficies de forma geométrica sencilla. Si un sistema óptico no posee superficies reflectoras, se llama *dioptrio*. Un *dioptrio plano* está constituido por dos medios transparentes, homogéneos, de distinto índice de refracción, separados por una superficie plana. Por ejemplo, en un recipiente con agua tenemos un dioptrio plano (aire-agua separados por la superficie libre del líquido).

Imágenes producidas por un dioptrio plano. — Sea (fig. 67) S la superficie plana de separación de dos medios de índices n_1 y n_2, siendo $n_1 > n_2$. Un punto luminoso P envía rayos en todas direcciones. Si un rayo es normal a S, no se desvía (por ejemplo, PO). Si el rayo es PI, sufre refracción al pasar al segundo medio, y se verifica $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$; como $n_1 > n_2$, $i < r$. Un observador que contemplase el punto P desde R lo vería en P', intersección del rayo PO y la prolongación de IR. Este observador debería ver a P en P' para cualquier rayo que haya partido de P (condición de estigmatismo, según veremos más adelante). Para saber si ocurre esto, determinaremos la distancia OP' en función del ángulo de incidencia. Si esta distancia es constante, al variar i el observador verá siempre en P' la imagen del punto P.

Del triángulo POI deducimos $OI = PO \cdot \text{tg } i$; del triángulo $P'IO$ deducimos $OI = P'O \text{ tg } r$. Igualando los dos valores de OI tenemos $PO \text{ tg } i = P'O \text{ tg } r$; $P'O = PO \frac{\text{tg } i}{\text{tg } r}$. De aquí deducimos que al variar i varía r y el cociente de sus tangentes no es constante. Si los ángulos son pequeños (incidencia casi normal), podemos sustituir tangente por seno, y queda:

$$P'O = PO \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$$

como

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = \text{constante}, \qquad P'O = PO \frac{n_2}{n_1} = \text{constante}$$

llamando

$$PO = x \qquad P'O = x' \qquad x' = x\frac{n_2}{n_1} \quad \text{o bien} \quad \frac{n_1}{x} = \frac{n_2}{x'}$$

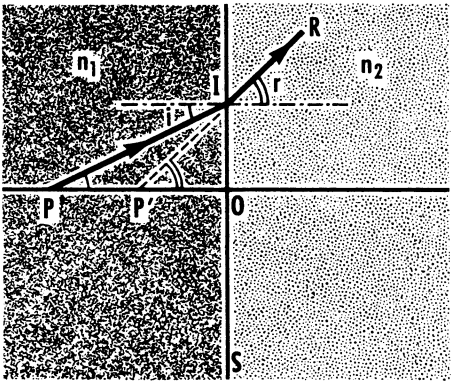


FIG 67

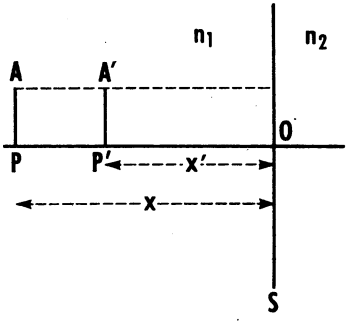


FIG. 68

que puede escribirse

$$-\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{x'} = 0$$

Sea el objeto AP situado a la distancia PO de S. La imagen de P está en P'. Si cumple con la condición anterior de incidencia casi normal $x' = x\frac{n_2}{n_1}$, todos los puntos que disten PO de S tienen su imagen a la misma distancia $P'O$ de S (fig. 68); la imagen de AP es la $A'P'$ situada a la distancia $P'O = PO\frac{n_2}{n_1}$ de S. La imagen es del mismo tamaño que AP y es virtual (formada por prolongación de rayos). En definitiva, *las imágenes obtenidas de un dioptrio plano, cumpliendo la condición de incidencia pequeña, son virtuales, derechas y de igual tamaño que el objeto.*

Marcha de la luz a través de una lámina de caras paralelas e imágenes producidas. — Una lámina de caras paralelas es un medio transparente homogéneo limitado por dos caras planas y paralelas. Supondremos dicha lámina rodeada por un mismo medio a un lado y otro de sus caras. Sea n el índice de refracción relativo de la lámina respecto al medio que la rodea. Un rayo incidente AO se refracta al pasar dentro de la lámina siguiendo el camino OO' (fig. 69, *a*). Al llegar a O' se refracta de nuevo y sigue el camino $O'A'$. Aplicando la ley de la refracción al rayo incidente AO

y al refractado OO', tenemos $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n$. Aplicando dicha ley a la segunda refracción tenemos $\frac{\text{sen } r'}{\text{sen } i'} = \frac{1}{n}$; como r y el ángulo r' que forma OO' son iguales, por alternos internos, deberá ser el ángulo $i = i'$. De aquí deducimos que el rayo OA' debe ser paralelo al incidente AO.

Si el rayo incidente fuese el $A'O'$, el rayo emergente sería el OA, debido a la igualdad de ángulos, tal como hemos visto. Esto puede considerarse una comprobación experimental del principio de retorno de los rayos luminosos.

El rayo emergente es paralelo al incidente, pero desplazado lateralmente. A la distancia entre estos dos rayos paralelos le llamaremos desplazamiento lateral d.

Para calcular d utilizaremos el triángulo OHO' (fig. 69, a):

$$d = OO' \text{ sen } \widehat{O'OH} = \frac{h}{\cos r} \text{ sen } (i - r)$$

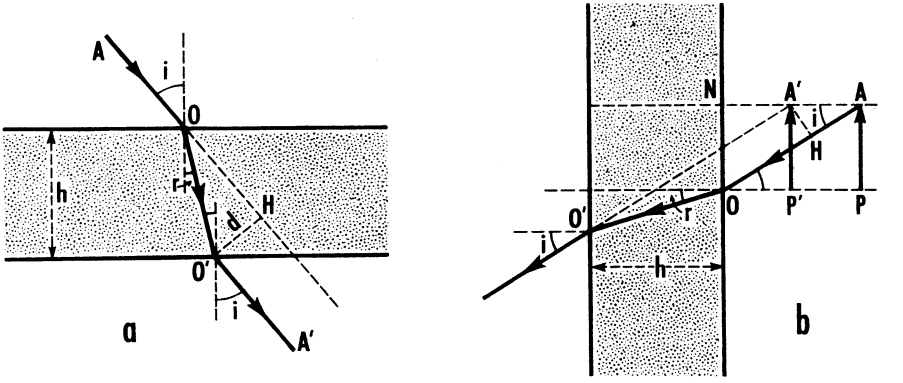


FIG. 69

Este desplazamiento lateral vemos que es directamente proporcional al espesor h de la lámina y varía de 0 a h cuando i varía de 0 a 90° ($i = 90°$, sen $(i - r) = \cos r$).

Sea el objeto AP (fig. 69, b). La imagen de P está sobre la recta PO y la de A sobre la recta AN. Trazando el rayo AO vemos en la figura 69, b, que el rayo emergente corta al AN en el punto A' (imagen del A) situado de AP a la distancia AA', que vamos a determinar. Del triángulo AHA' deducimos $AA' = \frac{A'H}{\text{sen } i}$; pero $A'H$ es el desplazamiento lateral

$$d = \frac{h}{\cos r} \text{ sen } (i - r)$$

así pues,

$$AA' = \frac{h\,(\text{sen } i \cdot \cos r - \cos i \cdot \text{sen } r)}{\text{sen } i \cdot \cos r} = h\left(1 - \frac{\text{tg } r}{\text{tg } i}\right)$$

Si i es pequeño, $\quad \text{tg } i \simeq \text{sen } i \qquad \text{tg } r \simeq \text{sen } r \qquad \dfrac{\text{tg } i}{\text{tg } r} = \dfrac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n$

entonces

$$AA' = h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Otro punto del objeto formaría su imagen a la misma distancia, luego la imagen es paralela al objeto (para incidencia pequeña). La imagen es virtual, igual al objeto, situada al mismo lado de la lámina que el citado objeto y distante de él

$$AA' = PP' = h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Marcha de la luz a través de un prisma. — Un prisma es un medio transparente limitado por dos dioptrios planos, llamados caras, que se cortan

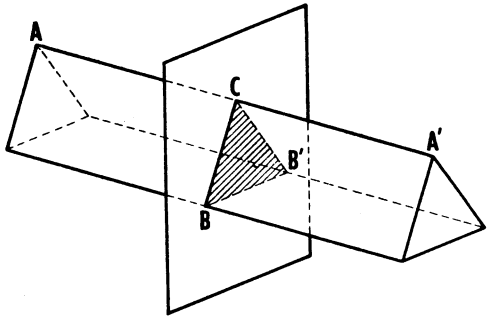


FIG. 70

en la arista del prisma. Cortando el prisma con un plano normal a la arista (fig. 70) obtenemos la sección principal CBB'. El ángulo determinado por BC y $B'C$ se llama *ángulo del prisma* o *ángulo refringente.*

Consideremos un prisma de índice de refracción n respecto al medio que le rodea (que supondremos es aire) y cuyo ángulo refringente es α. Para determinar la marcha de la luz a través de dicho prisma, consideremos un rayo luminoso en el plano que contiene a la sección principal. Sea RI el rayo incidente (fig. 71) contenido en el plano de la sección principal CMN (plano de la figura). Dicho rayo RI forma con la normal un ángulo i (ángulo de incidencia). Cuando llega al punto I, al penetrar

en el prisma, se refracta acercándose a la normal ($n > 1$), siguiendo el camino IE, el cual forma un ángulo r con la citada normal. Al llegar al punto E de la otra cara se refracta de nuevo, siguiendo el camino ER' (rayo emergente), que forma con la normal NE un ángulo e (ángulo de emergencia). El rayo $RIER'$ se mantiene siempre en el plano de la figura, según las leyes de la refracción.

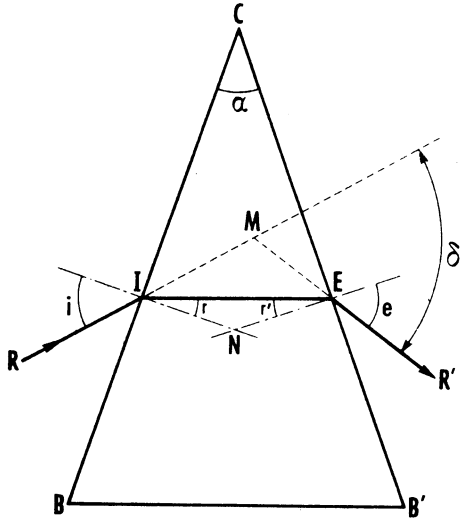


FIG. 71

Se llama *desviación* al ángulo formado por el rayo incidente y el emergente. En la figura la desviación es el ángulo δ. Conociendo n y α, para cualquier ángulo de incidencia podemos determinar la marcha de un rayo a través del prisma. De la figura deducimos:

$$r + r' = 180° - \widehat{INE}, \quad \text{pero} \quad \widehat{INE} = 180° - \alpha; \quad \text{luego} \quad r + r' = \alpha$$

Para hallar r conociendo i aplicamos

$$\text{sen } r = \frac{1}{n} \text{sen } i; \quad r' = \alpha - r; \quad \text{sen } e = n \text{ sen } r' = n \text{ sen } (\alpha - r)$$

La desviación dada por el ángulo

$$\delta = \widehat{MIE} + \widehat{MEI} = i - r + e - r' = i + e - (r + r') = i + e - \alpha$$

Si el ángulo de incidencia es pequeño, también lo será r, y si α es pequeño lo serán igualmente r' y e En este caso podemos sustituir los senos de los ángulos por los ángulos, y tenemos

$$\left.\begin{aligned} i &= nr \\ e &= nr' \end{aligned}\right\} \quad i + e = n(r + r') = n\alpha$$

$$\delta = n\alpha - \alpha = (n - 1)\alpha$$

Si el ángulo r' fuese superior al ángulo límite l del prisma respecto al medio que le rodea, sufriría reflexión total y no emergiría.

Siendo el valor máximo de r', l y el de r también l (cuando la incidencia es rasante, $i = 90°$, $r = l$), como $\alpha = r + r'$, el valor máximo de α para que haya emergencia es $\alpha = 2l$. En este caso un rayo incidente rasante emerge rasante.

Supongamos $\alpha = l$:

Para $i = 90°$, $r = l$, $r' = l - l = 0$, $e = 0$, el rayo emergente es normal a la cara.

Para $i = 0$, $r = 0$, $r' = l$, $e = 90°$, emergencia rasante.

Estudio de la desviación. — Hemos visto que la desviación δ vale:

$$\delta = i + e - \alpha$$

Vamos a determinar la desviación de un prisma de índice de refracción respecto al aire que le rodea $n = 1{,}5$ y cuyo ángulo $\alpha = 60°$, para distintos ángulos de incidencia. Utilizando las fórmulas dadas anteriormente para hallar r y e, hallaremos δ. Los valores obtenidos son los siguientes:

i	e	δ
30°	77° 7′	47° 7′
40°	58° 29′	38° 29′
45°	52° 24′	37° 24′
47°	50° 13′	37° 13′
48°	49° 11′	37° 11′
48° 30′	48° 40′	37° 10′ 25″
48° 35′	48° 35′	37° 10′
49°	48° 12′	37° 11′
50°	47° 14′	37° 14′
51°	46° 17′	37° 17′
55°	42° 44′	37° 44′
60°	38° 52′	38° 52′
70°	38° 52′	38° 52′

Representando gráficamente los valores de δ en función de i obtenemos la gráfica representada en la figura 72. Vemos que la desviación es mínima para $i = 48° 35'$ y vale $\delta = 37° 10'$. Observando que el correspondiente án-

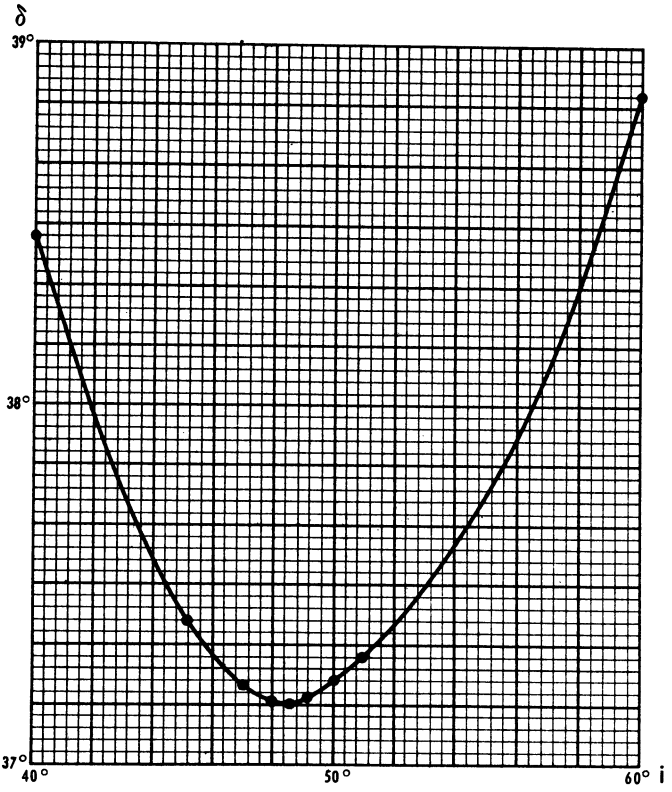


FIG. 72

gulo de emergencia $e = 48° 35' = i$. El valor mínimo de δ en general se obtiene cuando el ángulo de incidencia es igual al de emergencia, es decir, cuando $i = e$.

Podemos demostrarlo matemáticamente: Diferenciando las expresiones

$$\delta = i + e - \alpha$$
$$\text{sen } i = n \text{ sen } r$$
$$\text{sen } e = n \text{ sen } r'$$
$$\alpha = r + r'$$

obtenemos

$$d\delta = di + de$$
$$\cos i \, di = n \cos r \, dr$$
$$\cos e \, de = n \cos r' \, dr'$$
$$0 = dr + dr'$$

de donde deducimos:

$$dr = \frac{\cos i}{n \cos r} di \qquad de = -\frac{n \cos r'}{\cos e} \frac{\cos i}{n \cos r} di$$

$$dr' = -dr \qquad de = \frac{n \cos r' \, dr'}{\cos e} = -\frac{n \cos r'}{\cos e} dr$$

$$d\delta = di - \frac{\cos i \cos r'}{\cos e \cos r}\, di$$

$$\frac{d\delta}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos e \cos r} = 0$$

La condición de máximo o mínimo se cumple si $i = e$, ya que entonces $r = r'$

Podemos ver que es un mínimo hallando la segunda derivada y comprobar que es positiva para $i = e$.

Para un prisma de pequeño ángulo y con incidencia pequeña vimos que la desviación $\delta = (n-1)\alpha$; la desviación es constante, directamente proporcional a α y a $n-1$.

La existencia del mínimo de desviación nos permite determinar el índice de refracción del prisma midiendo el ángulo δ. Como $i = e$,

$$\delta_m = 2i - \alpha; \qquad i = \frac{\delta_m + \alpha}{2}; \qquad r = r' = \frac{\alpha}{2}$$

Si conocemos δ_m y α, hallamos n:

$$n = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\delta_m + \alpha}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{2}}$$

Si α es pequeño para incidencia casi normal, para hallar n basta despejarlo de $\delta = (n-1)\alpha$

$$n - 1 = \frac{\delta}{\alpha}; \qquad n = \frac{\delta}{\alpha} + 1$$

PRÁCTICAS

Estudio experimental de la desviación de un prisma. —Para medidas de precisión necesitamos un goniómetro (fig. 73), que nos permite medir ángulos con la precisión requerida.

Un foco luminoso L colocado en un tubo llamado colimador (C) nos manda un rayo de luz monocromática (basta filtrar luz blanca interponiendo un filtro adecuado a la salida del rayo que nos da el foco), el cual incide sobre el prisma. Moviendo el prisma variamos el ángulo de incidencia y, por lo tanto, el rayo emergente tiene distinta dirección. Midiendo el ángulo que forma el rayo emergente con el rayo incidente (tenemos el rayo incidente quitando el prisma y observando el rayo luminoso con el anteojo A) podremos hallar la desviación. Al mover el anteojo para observar el rayo emergente, gira y podemos medir el ángulo girado. Primero observamos el rayo directo (sin el pris-

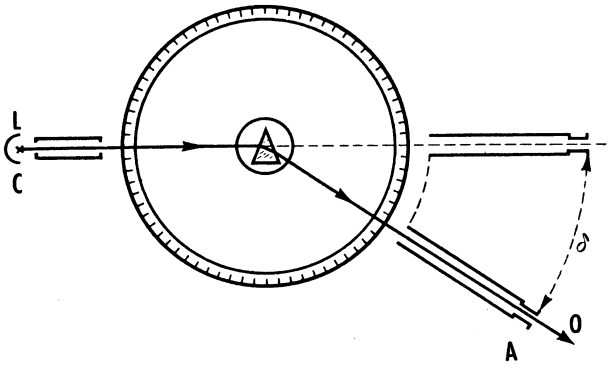


FIG. 73

ma), luego colocamos el prisma y vamos girando el anteojo hasta observar el rayo emergente. Midiendo el ángulo girado tendremos la desviación (δ).

Variando el ángulo de incidencia lograremos hallar el mínimo de desviación y podremos comprobar que el ángulo de incidencia y el de emergencia son iguales.

CAPÍTULO XXII

DIOPTRIO ESFÉRICO

Conceptos generales sobre imágenes. — Un punto luminoso envía rayos en todas direcciones. Si un haz de rayos que parte del citado punto atraviesa un sistema óptico, la trayectoria de los rayos sufre cambios de dirección. Supongamos un haz de rayos que parte de un punto P (fig. 74, *a*);

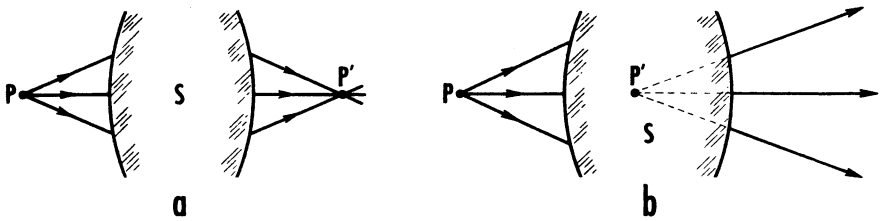


FIG. 74

si después de haber atravesado el sistema óptico S dicho haz converge en un punto P', este punto es la imagen real de P. Si el haz que parte de P después de atravesar el sistema S forma un haz de rayos divergentes, de modo que sus prolongaciones convergen en P' (fig. 74, *b*), dicho punto P' es la imagen virtual de P.

Un observador situado dentro del haz de rayos vería lo mismo una imagen real que una virtual; pero si colocamos una pantalla adecuada, sólo se formará sobre ella una imagen real, y no una virtual.

Si interponemos otro sistema óptico entre S y P', el haz de rayos debido al nuevo sistema no nos forma la imagen en el mismo punto que antes; el haz de rayos puede converger en otro punto o diverger y dar una imagen virtual. Como la prolongación de los rayos de entrada al nuevo sistema convergen en P' (punto imagen en ausencia del nuevo sistema), al punto P' se le llama punto objeto virtual respecto a dicho nuevo sistema óptico.

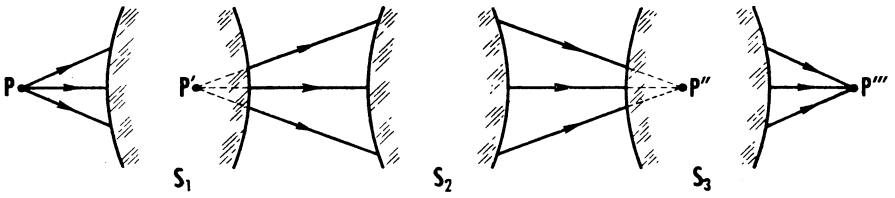


FIG. 75

En la figura 75 representamos tres sistemas ópticos: S_1, S_2, S_3. Un punto luminoso P produce una imagen P' al atravesar S_1 que es virtual, siendo un punto luminoso real respecto a S_2, el cual da una imagen real P'', que es un punto luminoso virtual respecto a S_3, el cual da una imagen real P'''. El conjunto de los tres sistemas nos proporciona una imagen real P''' de P.

Suponiendo que la luz se propaga de izquierda a derecha, el espacio antes de la superficie que limita el dioptrio por donde entra la luz se llama *espacio objeto real*. El espacio a partir de dicha superficie se llama *espacio objeto virtual*.

Al espacio a partir de la superficie que limita el sistema óptico por donde sale la luz que lo ha atravesado se le llama *espacio imagen real*, y al espacio anterior a la citada superficie *espacio imagen virtual*.

Las imágenes reales se forman en el espacio imagen real, y las virtuales en el espacio imagen virtual.

Un sistema óptico se dice que es *estigmático* cuando la imagen real o virtual de un punto es otro punto; o sea: cualquier haz de rayos que parte de un punto después de atravesar un sistema óptico estigmático converge (los rayos o sus prolongaciones) en un punto. Si la luz parte del segundo punto, según el principio del retorno inverso de los rayos, nos dará como imagen el primer punto. Estos dos puntos se llaman *conjugados* respecto al sistema. La condición de estigmatismo puede expresarse diciendo que el camino óptico punto luminoso - imagen sea constante.

Dioptrio esférico. — Dos medios transparentes de distinto índice de refracción separados por una superficie esférica constituyen un dioptrio esférico. El centro de la esfera y su radio son el centro y el radio del dioptrio. Generalmente el dioptrio es un casquete esférico, su eje de simetría es el eje principal del dioptrio, la intersección de dicho eje con la superficie es el polo o vértice del dioptrio. Toda recta que pasando por el centro corta a la superficie se llama eje secundario. Un plano que pase por el eje determina una sección principal.

Hay que establecer una regla para los signos que hay que atribuir a las distancias y a los ángulos que consideremos en el estudio del paso de la luz a través del dioptrio. Adoptaremos el convenio de signos DIN.

Tomaremos como origen de distancias el vértice del dioptrio y contaremos las distancias positivamente en el sentido de propagación de la luz, el cual supondremos que es de izquierda a derecha. El radio del dioptrio será positivo si la superficie es convexa observada por la izquierda (es decir, el centro está a la derecha de la superficie). La distancia de un punto al eje principal es positiva si el punto está en la parte superior. El ángulo formado por un rayo luminoso y una recta es positivo cuando para hacer coincidir la recta con el rayo según el menor ángulo, el sentido de giro sea el de las agujas de un reloj.

Deducción de la fórmula general del dioptrio esférico. — Sea (fig. 76) un dioptrio esférico de centro C, radio R y vértice O. Un punto luminoso P sobre el eje principal manda un rayo PI que se refracta siguiendo el camino IP'; suponemos $n' > n$, por lo tanto el rayo IP' se aproxima a la normal. El rayo PO no sufre desviación (es normal al dioptrio) y corta al rayo IP' en P'; este punto P' será la imagen de P.

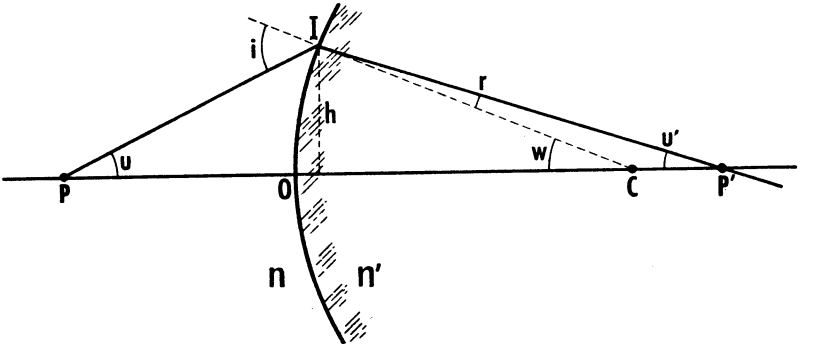


FIG. 76

En el triángulo PIC se verifica:

$$\frac{PC}{\text{sen } PIC} = \frac{IC}{\text{sen } u}$$

En el triángulo CIP' se verifica:

$$\frac{P'C}{\text{sen } r} = \frac{IC}{\text{sen } u'}$$

dividiendo, y como sen PIC = sen i,

$$\frac{PC}{P'C} \frac{\text{sen } r}{\text{sen } i} = \frac{\text{sen } u'}{\text{sen } u}$$

pero $\dfrac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \dfrac{n'}{n}$; luego $\dfrac{PC}{P'C}\dfrac{n}{n'} = \dfrac{\text{sen } u'}{\text{sen } u}$, $P'C = \dfrac{n}{n'}\dfrac{\text{sen } u}{\text{sen } u'} PC$

Según el convenio anterior, u es negativo y u' positivo, luego la fórmula se escribirá:

$$P'C = -\frac{n}{n'}\frac{\text{sen } u}{\text{sen } u'} PC$$

Escribiendo:

$$p = PI \quad \text{y} \quad p' = IP'; \qquad PO = x; \qquad OP' = x$$

$$PC = PO + OC = -x + R \quad \text{(ya que } P \text{ está a la izquierda de } O\text{)}$$

$$PC = -x + R; \qquad \text{sen } u = \frac{h}{p}; \qquad \text{sen } u' = \frac{h}{p'}; \qquad P'C = x' - R$$

$$x' - R = -\frac{n}{n'}\frac{\dfrac{h}{p}}{\dfrac{h}{p'}}(-x + R) = -\frac{n}{n'}\frac{p}{p}(-x + R)$$

o bien $$\frac{n(x - R)}{p} = \frac{n'(x' - R)}{p'}$$

Condiciones de estigmatismo perfecto y de estigmatismo aproximado: fórmulas de Gauss, Abbe y Newton. — Recordemos la fórmula

$$P'C = -\frac{n}{n'}\frac{\text{sen } u}{\text{sen } u'} PC$$

de aquí deducimos que otro rayo que salga de P con inclinación distinta de u no nos dará la imagen en P'; este dioptrio no es estigmático (se dice que es *astigmático*). Vamos a ver cuál es la condición de estigmatismo perfecto:
De la figura deducimos

$$-u = i - w; \qquad u' = w - r$$

Como i es negativo, lo mismo que r, escribiremos:

$$-u = -i - w; \qquad u = i + w; \qquad -u' = -w - r; \qquad u' = w + r$$

Sustituyendo en la fórmula anterior tenemos:

$$P'C = -\frac{n}{n'}\frac{\text{sen } (i + w)}{\text{sen } (w + r)}$$

Supongamos que $w = -i - r$; entonces

$$P'C = -\frac{n}{n'}\frac{\text{sen } (-r)}{\text{sen } (-i)}PC = -\frac{n}{n'}\frac{\text{sen } r}{\text{sen } i}PC = -\left(\frac{n}{n'}\right)^2 PC$$

ya que $\dfrac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \dfrac{n'}{n}$.

En este caso el estigmatismo será perfecto, pues $P'C$ no depende de la inclinación de los rayos que parten de P para formar la imagen en P'. El dioptrio esférico es rigurosamente estigmático para los puntos tales que se verifique la relación $w = -i - r$. También es estigmático para su centro, el cual es su propia imagen.

Consideremos un haz de rayos muy estrecho (pincel de rayos) y muy poco inclinado respecto al eje principal (rayos paraxiales), de forma que podamos hacer $p \simeq x$, $p' \simeq x'$; en este caso la fórmula

$$\frac{n(x-R)}{p} = \frac{n'(x'-R)}{p'}$$

nos queda

$$\frac{n\,(x-R)}{x} = \frac{n'\,(x'-R)}{x'}; \qquad n\left(1-\frac{R}{x}\right) = n'\left(1-\frac{R}{x'}\right)$$

o bien

$$n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{x}\right) = n'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{x'}\right) = Q$$

que es el *invariante de Abbe*. Haciendo operaciones queda

$$\frac{n}{R} - \frac{n}{x} = \frac{n'}{R} - \frac{n'}{x'}$$

que puede escribirse

$$\frac{n'}{R} - \frac{n}{R} = \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x}, \quad \text{o sea} \quad \frac{n'-n}{R} = \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x}$$

Ésta es la FÓRMULA DE GAUSS. En este caso tenemos estigmatismo aproximado. A la anterior aproximación (para rayos paraxiales) se le llama aproximación de Gauss, que será válida para todo objeto de pequeñas dimensiones, situado normalmente al eje y centrado sobre él, cuando manda un pincel de rayos de poca abertura sobre un dioptrio esférico.

Supongamos un pincel de rayos paralelos (fig. 77, *a*). En este caso P está en el infinito. A P' se le llama foco imagen del dioptrio, y a la distancia x' se le llama distancia focal imagen f'.

Si hacemos x infinito, en la fórmula anterior tenemos:

$$\frac{n'-n}{R} = \frac{n'}{f'}; \quad \text{de donde} \quad f' = \frac{n'}{n'-n}R$$

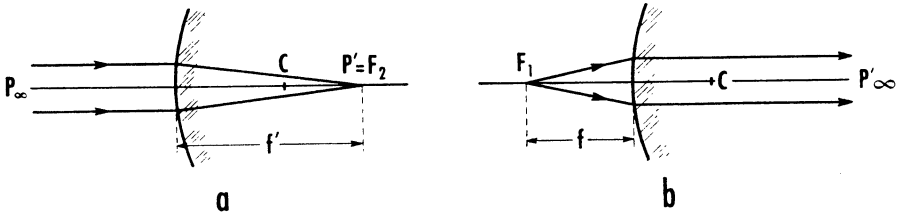


FIG. 77

A un punto sobre el eje situado a una distancia $x = f$ (fig. 77, *b*) del vértice tal que un pincel de rayos que partiendo de este punto nos diese un pincel emergente de rayos paralelos al eje, se le llama foco objeto, y a la distancia f se le llama distancia focal objeto. El punto conjugado está en el infinito ($x' = \infty$), luego

$$\frac{n' - n}{R} = -\frac{n}{f}, \quad \text{de donde} \quad f = -\frac{n}{n' - n} R$$

Las distancias focales valen, pues,

$$\left\{ \begin{array}{l} f = -\dfrac{n}{n' - n} R \\ f' = \dfrac{n'}{n' - n} R \end{array} \right.$$

El cociente $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$ nos indica que las distancias focales son de signo contrario. En la fórmula $\frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x}$ sustituimos

$$\frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{f'} \qquad \frac{n'}{f'} = \frac{n'}{x} - \frac{n}{x}$$

dividiendo por n' queda:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{x'} - \frac{\frac{n}{n'}}{x} \qquad \text{pero} \qquad \frac{n}{n'} = -\frac{f}{f'}$$

luego

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{x'} + \frac{f}{f'x} \qquad \text{o bien} \qquad 1 = \frac{f'}{x'} + \frac{f}{x}$$

tenemos la fórmula del dioptrio esférico en función de las distancias focales:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1$$

FÓRMULA DE NEWTON. — Midiendo las distancias del objeto respecto al foco objeto y las de la imagen respecto al foco imagen, llamando X y X' a las nuevas distancias, las x, x' anteriores valen $x = X + f$. $x' = X' + f'$. Sustituyendo en la fórmula anterior tenemos:

$$\frac{f}{X+f} + \frac{f'}{X'+f'} = 1$$

efectuando operaciones

$$fX' + ff' + Xf' + ff' = XX' + Xf' + X'f + ff'$$

simplificando queda:

$$f \cdot f' = X \cdot X'$$

que constituye la fórmula de Newton.

Como $f \cdot f'$ es constante, también lo será $X \cdot X'$.

PLANOS FOCALES. — Se llaman *planos focales* de un dioptrio esférico, a los planos que pasan por los focos respectivos y son perpendiculares al eje. Un haz de rayos, de vértice un punto de un plano focal, a la salida del dioptrio forma un haz de rayos paralelos entre sí. Un haz de rayos paralelos a la salida del dioptrio se cortan en un punto del plano focal. Si el dioptrio es divergente, las prolongaciones de los rayos incidentes paralelos se cortan en un punto del plano focal, que será virtual.

Aumento angular y aumento lateral. Invariante de Helmhotz. — Supongamos un objeto AP y vamos a formar su imagen $A'P'$ (fig. 78). Con la aproximación de Gauss, la imagen será paralela a AP; basta hallar la imagen de los puntos P y A, que son los P' y A', respectivamente.

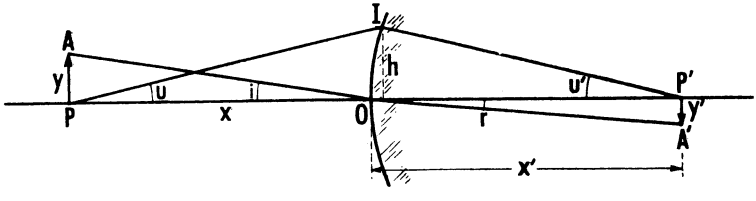


FIG 78

Se llama aumento lateral a la relación

$$\beta = \frac{A'P'}{AP}.$$

Si llamamos y a AP, e y' a $A'P'$ (que en la figura es negativo), podemos escribir:

$$\frac{y}{-y'}\cdot\frac{x}{-x}=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{n'}{n}\qquad \beta=\frac{y'}{y}=\frac{n}{n'}\frac{x}{x}=-\frac{f}{f'}\frac{x'}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y}{-x}=\operatorname{tg} i\simeq\operatorname{sen} i\\[2ex] \dfrac{-y'}{x'}=\operatorname{tg} r\simeq\operatorname{sen} r\end{array}\right.$$

Se llama aumento angular γ a la relación $\gamma=\dfrac{u'}{u}$ entre el ángulo u', que forma con el eje un rayo emergente que pasa por P', y el ángulo u que forma el correspondiente rayo incidente que pasa por P. De la figura deducimos:

$$\left.\begin{array}{l} u\simeq\operatorname{sen} u\simeq\operatorname{tg} u=\dfrac{h}{x}\\[2ex] u\simeq\operatorname{sen} u'\simeq\operatorname{tg} u'=\dfrac{h}{x}\end{array}\right\}\quad \frac{-u}{u'}=\frac{\dfrac{h}{-x}}{\dfrac{h}{x}}\quad\left\{\begin{array}{l} u \text{ es negativo}\\ u' \text{ es positivo}\\ x \text{ es negativo}\\ x' \text{ es positivo}\end{array}\right.$$

de donde

$$\frac{u}{u'}=\frac{x'}{x}.$$

Así, pues, el aumento angular

$$\gamma=\frac{u'}{u}=\frac{x}{x'}$$

Vamos a relacionarlo con el aumento lateral

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{n}{n'}\frac{x'}{x};$$

despejamos

$$\frac{x}{x'}=\frac{ny}{n'y'},$$

sustituimos en el aumento angular y tenemos

$$\gamma=\frac{x}{x'}=\frac{ny}{n'y'},\qquad \text{o sea}\qquad \frac{u'}{u}=\frac{ny}{n'y'}$$

de donde deducimos que

$$nyu=n'y'u',$$

que es la *ecuación de Helmhotz*. Esta relación nos expresa la invariancia del producto $n\cdot y\cdot u$ en los dos medios. Por esto también se llama *invariante de Helmhotz*.

PRÁCTICAS

Medida con el esferómetro del radio de un dioptrio esférico. — Primero comprobaremos el cero del esferómetro. Tomaremos el esferómetro y lo colocaremos apoyado sobre una superficie plana (una placa de vidrio, por ejemplo). Se hace descender el tornillo hasta que toque a la superficie. Se comprueba si la indicación es cero en la escala y el tambor graduado. Si no coinciden dichas indicaciones con el cero, se anota dicha indicación. Se repite varias veces esta operación y se toma la media aritmética. Este valor será el cero del instrumento.

Para medir el radio del dioptrio esférico apoyaremos el esferómetro sobre su superficie. Hacemos descender el tornillo hasta que toque a la superficie. Tomamos nota de la indicación en la escala y tambor. Si el cero fuese correcto, esta lectura sería la flecha o altura del casquete esférico, limitado por la circunferencia determinada por los pies del esferómetro y la superficie esférica. Si el cero no es correcto hay que sumar o restar a la lectura anterior el error de cero según que el cero real sea superior o inferior al cero de la escala. Una vez tenemos la flecha h podemos hallar el radio de la esfera. Según la figura 79 vemos que se cumple $r^2 = h\,(2R - h)$, siendo r el radio de la circun-

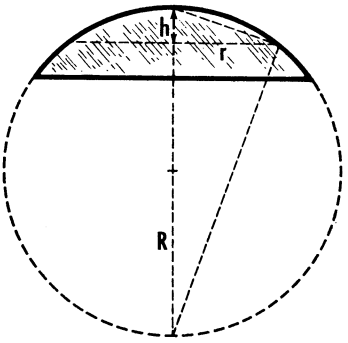


FIG. 79

ferencia determinada por los tres pies del aparato, el cual puede hallarse conociendo o midiendo el lado l del triángulo equilátero que determinan dichos pies, el valor de r es:

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Despejando de la fórmula anterior el radio R de la esfera, tenemos:

$$2R - h = \frac{r^2}{h}, \qquad R = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{h} + h\right)$$

CAPÍTULO XXIII

SISTEMAS ÓPTICOS CENTRADOS

Se llama sistema óptico centrado a un conjunto de dioptrios esféricos, cuyos centros están alineados. A la recta que une los centros se le llama eje del sistema. Si algunos de los dioptrios fuese plano (esfera de radio infinito) estaría situado normalmente al eje del sistema.

De la definición del eje se deduce que un rayo luminoso dirigido según el eje se propaga en línea recta sin desviarse; de aquí deducimos que la imagen de un punto situado sobre el eje, está situada también sobre el eje. Se llama *sección principal* a la sección del sistema por un plano que pase por el eje. Si un rayo luminoso tiene dos puntos pertenecientes a la sección principal en el transcurso de la propagación a través del sistema siempre estará contenido en dicha sección principal.

Ejemplos de sistemas ópticos centrados: lupa, ojo, microscopio.

Un sistema óptico centrado será estigmático para rayos de pequeña inclinación respecto al eje del sistema (el caso del dioptrio esférico).

Definición de focos y planos focales. — Se llama *foco imagen* del sistema a un punto del eje que es el punto de convergencia de un pincel de rayos paralelo al eje. El *foco objeto* es el punto del eje de donde debe partir un pincel de rayos para que, una vez atravesado el sistema, salga paralelo al eje. Se llama *plano focal imagen* a un plano perpendicular al eje y que pasa por el foco imagen. Este plano es el conjugado de un plano objeto alejado indefinidamente. Se llama *plano focal objeto* a un plano perpendicular al eje y que pasa por el foco objeto. El plano conjugado de dicho plano está indefinidamente alejado y es perpendicular al eje. Todo pincel de rayos que sale de un punto situado en el plano focal objeto a la salida del sistema de un pincel de rayos paralelos, pero inclinados con respecto al eje. Un pincel de rayos paralelos, inclinado con respecto al eje, da una imagen situada en el plano focal imagen.

Puntos y planos principales. — Se llaman *puntos principales* a dos puntos conjugados situados sobre el eje, de forma que el aumento lateral correspondiente sea igual a + 1. *Planos principales* son dos planos conjugados para los cuales el aumento lateral es igual a + 1. Estos planos pasan por los puntos principales y son normales al eje del sistema.

Relaciones fundamentales. — Tracemos la recta AM, paralela al eje, que parte de un punto A del plano focal objeto (fig. 80). Esta recta corta a los planos principales en los puntos M y M'. Según las propiedades de los planos principales $M'H'$ es la imagen de MH, siendo $MH = M'H'$.

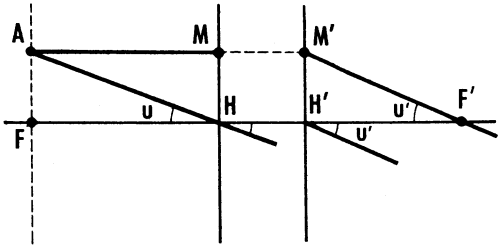


FIG. 80

Un rayo incidente AM paralelo al eje se corta con el emergente $M'F'$, que pasa por el foco imagen F', en el punto M' del plano principal imagen, ya que por ser M y M' conjugados, al rayo AM le corresponde el $M'F'$.

El rayo incidente AH forma un ángulo u con el eje; como el punto H' es el conjugado de H, el rayo emergente sale de H'. Sea u' el ángulo que forma con el eje. Según el invariante de Helmhotz debe verificarse $n \cdot MH \cdot u = n'M'H' \cdot u'$. Como $MH = M'H'$ debe ser $nu = n'u'$, debido a que u es positivo u' debe serlo también. Según sabemos, los rayos que parten de un punto del plano focal a la salida deben ser paralelos, así, pues, el rayo emergente de H' debe ser paralelo a $M'F'$ que corta al eje en el foco imagen F'; el foco imagen debe estar a la derecha de $H'M'$ (para que u' sea positivo al igual que u). En general, si F está a la izquierda de H, F' está a la derecha de H'. A la distancia $f = H'F'$ se llama distancia focal imagen y a $f = HF$ se le llama distancia focal objeto. Según lo dicho antes estas distancias focales siempre son de signo contrario (en la figura f es negativa, y f' positiva).

En la figura, del triángulo AFH deducimos $FA = HF \cdot \text{tg } u \simeq HF \cdot u$ (suponemos u pequeño) $FA = f \cdot u$.

Del triángulo $M'H'F'$ deducimos $H'M' = H'F' \cdot \text{tg } u' \simeq f' \cdot u'$

Como $FA = H'M'$, siendo f negativo, escribiremos $-f \cdot u = f' \cdot u'$, antes hemos visto que $n \cdot u = n' \cdot u'$ dividiendo miembro a miembro esta igualdad y la anterior tenemos:

$$\frac{n}{-f} = \frac{n'}{f'} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'},$$

es decir: *la relación entre las distancias focales es igual al cociente entre los índices de refracción de los medios extremos, cambiada de signo.* Si los medios extremos son idénticos (como ocurre generalmente), las distancias focales son iguales y opuestas.

Si el foco imagen está a la derecha de la cara extrema del sistema óptico, el sistema es convergente; es decir, un haz de rayos incidente paralelo al eje, al emerger, converge. Si el foco imagen está a la izquierda de la cara extrema del sistema óptico, los rayos emergentes del sistema divergen. El primer sistema se llama *convergente,* y el segundo *divergente.*

Sea (fig. 81) un sistema óptico de focos F y F', distancias focales f y f', puntos principales H y H'.

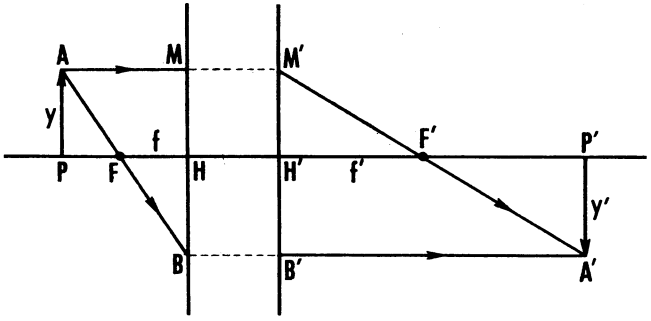


FIG. 81

Un rayo AM paralelo al eje a la salida pasa por F', siendo $M'F'$ el rayo emergente. Un rayo AF, que pasa por el foco objeto, a la salida es paralelo al eje. De los triángulos AMB y $M'B'H'$ deducimos:

$$\frac{FH}{AM}=\frac{HB}{MB} \qquad \frac{H'F'}{B'A'}=\frac{M'H'}{M'B'}$$

$$\left.\begin{array}{r} FH=-f \\ AM=PH=-x \\ H'F'=f' \\ B'A'=H'P'=x' \end{array}\right\} \quad \frac{-f}{-x}=\frac{HB}{MB} \qquad \frac{f'}{x'}=\frac{M'H'}{M'B'}$$

$$\text{pero} \begin{cases} MB=M'B' \\ HB+M'H'=HB+HM=MB \end{cases}$$

Sumando y teniendo en cuenta las anteriores relaciones, queda:

$$\frac{f}{x}+\frac{f'}{x'}=\frac{HB+M'H'}{MB}=1 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{f}{x}+\frac{f'}{x'}=1$$

Nos da una fórmula análoga al dioptrio esférico único, siendo ahora las f distancias de los focos a los planos principales respectivos y la x la distancia del objeto al plano principal objeto; x' la distancia del plano principal imagen a la imagen (1).

De las anteriores relaciones de semejanza de triángulos vemos que siendo $HB = H'B' = -y'$, $M'H' = MH = y$, podemos escribir:

$$\frac{-f}{-x} = \frac{-y'}{MB} \qquad \frac{f'}{x'} = \frac{y}{M'B'}$$

dividiendo miembro a miembro

$$\frac{\dfrac{f}{x}}{\dfrac{f}{x'}} = \frac{\dfrac{-y}{MB}}{\dfrac{y}{M'B'}}$$

como $MB = M'B$

$$\frac{fx'}{f'x} = -\frac{y'}{y}$$

El aumento lateral (relación entre alturas de imagen y objeto)

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{f'}\,\frac{x'}{x},$$

fórmula análoga a la hallada en el dioptrio esférico. Si $n = n'$, $f = -f'$, entonces $\beta = \dfrac{x'}{x}$.

Para hallar el aumento angular aplicamos el invariante de Helmhotz; debe verificarse $n \cdot y \cdot u = n' \cdot y' \cdot u'$.

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{ny}{n'y'} = -\frac{f}{f'}\,\frac{y}{y'} = -\frac{f}{f'}\,\frac{1}{\beta} \qquad \text{o bien} \qquad \gamma = \frac{n}{n'}\,\frac{1}{\beta}$$

Si los índices de refracción de los dos medios extremos son iguales, el aumento angular es igual al recíproco del aumento lateral.

Tomando como origen los focos; en el espacio objeto, el foco objeto, y en el espacio imagen, el foco imagen. Llamando X y X' a las nuevas distancias; como $x = X + f$, $x' = X' + f'$, la relación

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1,$$

se transforma

$$\frac{f}{X + f} + \frac{f'}{X' + f'} = 1 \cdot$$

(1) Lo cual indica que un dióptico esférico puede considerarse como un sistema óptico cuyos planos principales coinciden en el vértice.

efectuando operaciones (como se hizo en el dioptrio esférico) hallaremos $X \cdot X' = f \cdot f'$, que es la fórmula de Newton, análoga a la hallada en el dioptrio esférico.

Si fuese $n = n'$ sería $f = -f'$, la fórmula

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1$$

se transforma en

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}, \qquad \text{o} \qquad -\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f'},$$

y la fórmula de Newton se escribe $X \cdot X' = -f^2$.

Combinación de sistemas ópticos. — Sean dos sistemas ópticos cuyos puntos principales son H_1 y H'_1 H_2 y H'_2; los focos, F_1 y F'_1, F_2 y F'_2; las distancias focales, f_1 y f'_1, f_2 y f'_2. Queremos determinar los focos F y F' así como los puntos principales H y H' del sistema formado por los dos sistemas dados. Sea (fig. 82) un rayo

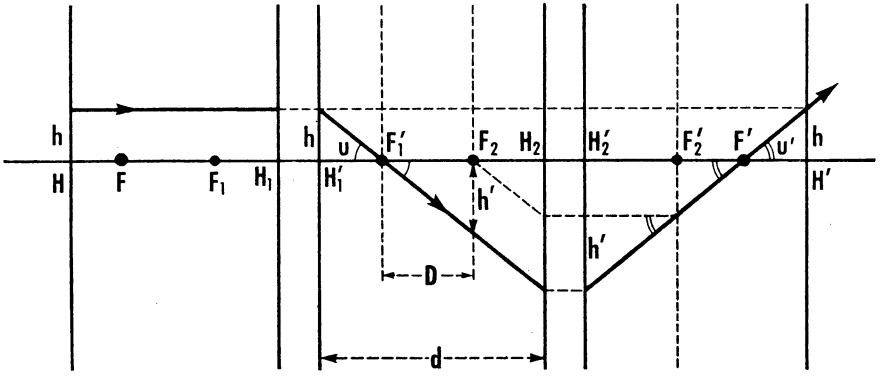


FIG. 82

incidente paralelo al eje y distante h del mismo; después de cortar al plano principal imagen del primer sistema, pasa por el foco imagen F'_1 del primer sistema; a la salida E del plano principal imagen del segundo sistema pasa por el foco imagen F' del sistema resultante y corta al plano principal de dicho sistema resultante en un punto que dista h del eje principal del sistema. A la distancia entre H'_1 y H_2 le llamamos d, y a la distancia entre F'_1 y F_2 le llamamos D. El valor de D es $D = d - f'_1 - f_2$; pero f_2 es negativo; así pues, $D = d - f'_1 + f_2$. Como F' es el conjugado de F'_1 respecto al segundo sistema, podemos aplicar la fórmula de Newton y tendremos:

$$\overline{F'_2 F'} \cdot (-\overline{F'_1 F_2}) = f_2 \cdot f'_2 \qquad \text{de donde} \qquad \overline{F'_2 F'} = -\frac{f_2 f'_2}{D}$$

Haciendo lo mismo con F y F_2, que son conjugados respecto al primer sistema:

$$\overline{F F_1} \cdot \overline{F'_1 F} = f_1 \cdot f'_1 \qquad \text{de donde} \qquad \overline{F F_1} = \frac{f_1 f'_1}{D}$$

Un rayo que parte de F_2 paralelo a F'_1 a la salida del plano principal imagen del segundo sistema (en M) nos da el rayo MF''_2 paralelo al eje que se corta con el rayo EF'' (emergente de uno paralelo al que parte de F_2) en un punto F''_2 del plano focal imagen del segundo sistema. De la figura deducimos que:

$$\text{tg } u' = -\frac{h}{f'} = -\frac{h'}{f'_2} \qquad \text{tg } u = \frac{h}{f'_1} = \frac{h'}{D}$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{-f'}{f'_2} \qquad \frac{h}{h'} = \frac{f'_1}{D} \qquad \text{igualando:} \quad f' = -\frac{f'_1 f'_2}{D}$$

u' es negativo: h', negativa; h, positivo; como tg u' es negativa y h positivo, f' será negativa.

Operando análogamente con f hallaríamos: $f = \frac{f_1 f_2}{D}$.

Vamos a hallar las distancias de F a H_1, de H a H_1, de H_2 a F' y de H_2 a H'

La distancia $\overline{F H_1} = \overline{F F_1} + \overline{F_1 H_1} = \frac{f_1 f'_1}{D} + f_1 = \frac{f_1 (f'_1 + d - f'_1 + f_2)}{D} = \frac{f_1 (d + f_2)}{D}$

La distancia $\overline{H H_1} = \overline{H F} + \overline{F H_1} = -f + \frac{f_1 (d + f_2)}{D} = -\frac{f_1 f_2}{D} + \frac{f_1 d + f_1 f_2}{D} = \frac{f_1 d}{D}$

(f es negativa respecto a H_1)

Operando análogamente con F' hallaríamos:

$$\overline{H_2 F'} = \frac{f'_2 (d - f'_1)}{D} \qquad \overline{H_2 H'} = \frac{f'_2 d}{D}$$

La distancia focal $\overline{F H} = \overline{F H_1} - \overline{H H_1} = \frac{f (d + f_2)}{D} - \frac{f_1 d}{D} = \frac{f_1 f_2}{D}$

analogamente: $\overline{F' H'} = -\frac{f'_1 f'_2}{D}$ (recordemos que $D = d - f'_1 + f_2$)

Así pues, tendremos la posición de los focos y puntos principales del sistema total.

Lentes esféricas. — Una lente esférica es un medio transparente limitado por dos superficies esféricas, o bien un sistema formado por dos dioptrios esféricos. El eje principal es la recta que une los centros de curvatura de las superficies esféricas que la limitan. Es, pues, un sistema centrado. Las superficies dióptricas que limitan la lente se llaman *caras*. Una de las caras puede ser plana. La distancia entre los vértices de los dioptrios se llama *espesor* de la lente. Según la disposición relativa de las superficies esféricas que constituyen, las caras (fig. 83) se dividen en:

a) BICONVEXA: radios de curvatura de signos contrarios, más gruesa en el centro que en los bordes;

b) PLANOCONVEXA: una cara plana y también más gruesa en el centro;

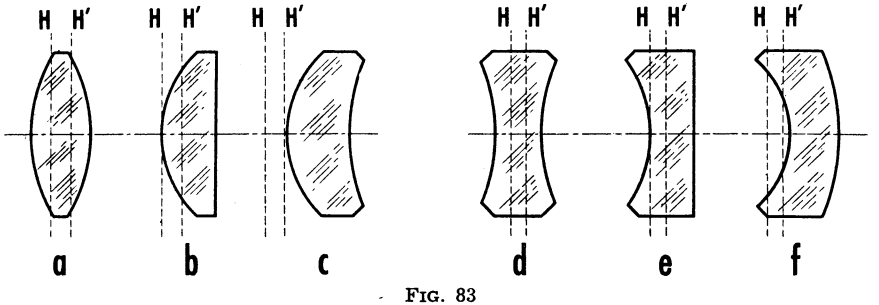


FIG. 83

c) CONCAVOCONVEXA: radios de curvatura del mismo signo; como las anteriores, más gruesa en el centro. Estas lentes son convergentes;

d) BICÓNCAVA: radios de curvatura de signos contrarios, más delgada en el centro que en los bordes;

e) PLANOCÓNCAVA: una cara plana, más delgada en el centro que en los bordes;

f) CONVEXOCÓNCAVA: radios de curvatura del mismo signo y más delgada en el centro que en los bordes. Estas lentes son divergentes.

(En la misma figura se han dibujado las posiciones de los planos principales.)

Como sistema óptico centrado, las lentes tienen las propiedades de dichos sistemas. Poseen dos focos, dos planos principales y un centro óptico que es un punto del eje tal, que un rayo que pase por dicho centro después de refractado por la primera cara, a la salida es paralelo a su dirección incidente.

Determinación gráfica de los focos y de los planos principales de una lente esférica gruesa. — Sea la lente representada en la figura 84, limitada por los dioptrios esféricos D_1 y D_2 de radios R_1 y R_2 (en la figura, R_1 es positivo y R_2 negativo). Si no conocemos las distancias focales de los dioptrios esféricos que constituyen la lente, los podemos calcular aplicando las fórmulas halladas para los dioptrios esféricos:

$$f = -\frac{n}{n' - n} R; \qquad f' = \frac{n'}{n' - n} R$$

Para el primer dioptrio, $n = 1$ y n' es el índice de refracción N del vidrio, luego

$$f_1 = -\frac{1}{N - 1} R_1; \qquad f_1' = \frac{N}{N - 1} R_1$$

Para el segundo dioptrio, $n = N$ índice de refracción del vidrio, y $n' = 1$:

$$f_2 = \frac{N}{N-1} R_2; \qquad f_2' = -\frac{1}{N-1} R_2$$

De esta forma determinamos los puntos F_1, F_1', F_2, F_2'.

Tracemos un rayo (una recta) paralelo al eje principal, que incide en el primer dioptrio D_1 en el punto I, se refracta siguiendo el camino IE, que

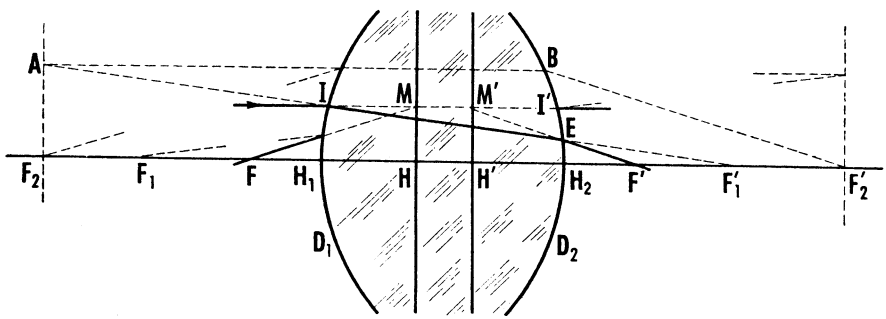


FIG. 84

pasaría por F_1' si no estuviese D_2. Al llegar a E se refracta de nuevo para pasar por F' (foco imagen de la lente). Para trazar el rayo EF' geométricamente procederemos de la siguiente forma:

Prolongamos IE hasta que corte al plano focal objeto del dioptrio D_2 (plano perpendicular al eje y que pasa por F_2). Sea A el punto de intersección con el citado plano. Trazamos desde A una paralela al eje que corta al dioptrio D_2 en el punto B; este rayo a la salida de D_2 pasará por el foco F_2'. Un haz de rayos que parte de un punto del plano focal sale del dioptrio con los rayos paralelos, luego AB y AE a la salida son paralelos. Trazamos desde E una paralela a BF_2' que corta al eje en el punto F', foco imagen de la lente.

Para hallar el plano principal imagen prolongamos el rayo EF' hasta que corte a la prolongación del rayo incidente en el punto M', que pertenece al plano principal imagen (recordemos que un rayo incidente paralelo al eje se encuentra con el rayo emergente que pasa por el foco en un punto del plano principal). Trazando desde M' un plano perpendicular al eje, corta a éste en el punto H', que es el punto principal imagen. Siendo este plano el plano principal imagen.

Operando análogamente con un rayo paralelo al eje de derecha a izquierda, obtendríamos el foco F y el plano principal objeto MH.

Determinación analítica de las distancias focales y posición de los planos principales en una lente esférica gruesa. — En los dioptrios que forman la lente puede

considerarse que en cada uno de ellos los planos principales coinciden con el plano tangente al dioptrio en el vértice (en la aproximación de Gauss), ya que es donde se cortan el rayo incidente paralelo al eje con el emergente que pasa por el foco imagen respectivo. De esta forma podemos aplicar las fórmulas halladas en la combinación de dos sistemas ópticos. En este caso, d (distancia entre los planos principales, imagen del primer sistema - objeto del segundo) es igual al espesor de la lente.

La distancia del plano principal objeto al vértice de la primera lente será:

$$H H_1 = \frac{f_1 d}{D} = \frac{f_1 d}{d - f'_1 + f_2} \qquad H_2 H' = \frac{f'_2 d}{D} = \frac{f'_2 d}{d - f'_1 + f_2}$$

Sustituyendo las f dadas anteriormente en función de los radios de curvatura tenemos:

$$D = d - f'_1 + f_2 = d - \frac{N}{N-1} R_1 + \frac{N}{N-1} R_2 = d + \frac{N}{N-1} (R_2 - R_1)$$

$$H H_1 = \frac{-\frac{R_1}{N-1} d}{d + \frac{N}{N-1}(R_2 - R_1)} = \frac{-R_1 d}{(N-1) d + N (R_2 - R_1)}$$

$$H_2 H' = \frac{-\frac{R_2}{N-1} d}{d + \frac{N}{N-1}(R_2 - R_1)} = \frac{-R_2 d}{(N-1) d + N (R_2 - R_1)}$$

Las distancias de los focos a los vértices de la lente serán:

$$F H_1 = \frac{f_1 (d + f_2)}{D} = \frac{-\frac{1}{N-1} R_1 \left(d + \frac{N}{N-1} R_2 \right)}{d + \frac{N}{N-1}(R_2 - R_1)} = \frac{-R_1 [(N-1) d + N R_2]}{(N-1)[(N-1) d + N (R_2 - R_1)]}$$

$$H_2 F' = \frac{f'_2 (d - f'_1)}{D} = \frac{-\frac{1}{N-1} R_1 \left(d - \frac{N}{N-1} R_1 \right)}{d + \frac{N}{N-1}(R_2 - R_1)} = \frac{R_2 [N R_1 - (N-1) d]}{(N-1)[(N-1) d + N (R_2 - R_1)]}$$

Para hallar las distancias focales, que son iguales y de signo contrario (por ser los índices de refracción de los medios extremos iguales) $-f = f'$

$$F H = F H_1 - F H_1 = \frac{f_1 (d + d_2)}{D} - \frac{f_1 d}{D} = \frac{f_1 f_2}{D}$$

Sustituyendo las f por los radios de curvatura hallamos:

$$f = F H = \frac{-\frac{1}{N-1} R_1 \frac{N}{N-1} R_2}{d + \frac{N}{N-1}(R_2 - R_1)} = \frac{-N R_1 R_2}{(N-1)[(N-1) d + N (R_2 - R_1)]}$$

Puede escribirse de forma más sencilla:

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = \frac{(N-1)[(N-1) d + N (R_2 - R_1)]}{N R_1 R_2} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{(N-1)^2 d}{N R_1 R_2}$$

Si d es pequeño comparado con los radios de curvatura, la fórmula anterior se escribe:

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Ejemplos:

En una lente biconvexa de radios iguales $R = R_1 = -R_2$, siendo $N = 1{,}5$ (índice de refracción del vidrio respecto al aire):

$$H H_1 = \frac{-R\,d}{0{,}5\,d - 1{,}5 \cdot 2\,R} = \frac{-R\,d}{0{,}5\,d - 3\,R} = \frac{d}{-\dfrac{0{,}5\,d}{R} + 3}$$

Suponiendo despreciable $\dfrac{0{,}5\,d}{R}$, frente a 3 queda $H H_1 = \dfrac{d}{3}$; como es positivo, está a la derecha de H_1 (del vértice izquierdo de la lente).

$$H_2 H' = \frac{-R\,d}{0{,}5\,d + 1{,}5 \cdot 2\,R} = \frac{d}{-\dfrac{0{,}5\,d}{R} - 3} \simeq -\frac{a}{3}$$

Está a la izquierda de H_2 (vértice derecho de la lente).

En una lente planoconvexa $R_1 = R$ y $R_2 = \infty$

$$H H_1 = \frac{-R\,d}{0{,}5\,d + 1{,}5\,(\infty - R)} = 0 \qquad H_2 H' = \frac{-R_2\,d}{0{,}5\,d + 1{,}5\,(R_2 - R)} = \frac{-d}{\dfrac{0{,}5\,d}{R_2} + 1{,}5\left(1 - \dfrac{R}{R_2}\right)}$$

Si $R_2 = \infty$ $\qquad H_2 H' = -\dfrac{d}{1{,}5} = -\dfrac{2}{3}\,d$ (a la izquierda de H_2)

En una bicóncava de radios iguales $R_1 = -R$; $R_2 = R$

$$H H_1 = \frac{-(-R)\,d}{0{,}5\,d + 1{,}5\,(R + R)} = \frac{d}{\dfrac{0{,}5\,d}{R} + 3} \simeq \frac{d}{3} \qquad H_2 H' = \frac{-R\,d}{0{,}5\,d + 1{,}5\,(R + R)} \simeq -\frac{d}{3}$$

En una planocóncava $R_1 = -R$ y $R_2 = \infty$

$$H H_1 = \frac{-R\,d}{0{,}5\,d + 1{,}5\,(\infty - R)} = 0$$

$$H H_2 = \frac{-R_2\,d}{0{,}5\,d + 1{,}5\,(R_2 + R)} = \frac{-d}{\dfrac{0{,}5\,d}{R_2} + 1{,}5\left(1 + \dfrac{R}{R_2}\right)} \to \frac{-d}{1{,}5} = -\frac{2d}{3}$$

H es tangente al vértice izquierdo y el H' a la izquierda de H_2.

Construcción de imágenes conociendo los focos y los planos principales. — Sea un objeto AP (fig. 81, pág. 331) perpendicular al eje. Tracemos desde A una recta paralela al eje que corta a los planos principales en los puntos M y M'. Unimos M' con F' y tendremos el rayo emergente. Tracemos una recta AF que pasa por el foco objeto y corta al plano principal

objeto en el punto B. Trazando desde B una paralela al eje tenemos el correspondiente rayo emergente que corta al rayo emergente anterior $M'F'$ en el punto A', que será la imagen del punto A. Como la imagen de AP es paralela a AP, trazando desde A una perpendicular al eje corta al eje en el punto P' conjugado de P. La imagen de AP será, pues, la $A'P'$.

Deducción de las fórmulas de las lentes esféricas delgadas. — En las lentes esféricas delgadas se considera su espesor despreciable frente a los radios de curvatura de sus caras. Se considera que los vértices de los dioptrios que constituyen la lente se confunden en un mismo punto, que es la intersección de la lente con el eje principal (centro de la lente). Debido a que el punto de incidencia de un rayo paralelo al eje puede considerarse que coincide con el de emergencia del rayo refractado en un mismo punto del plano de la lente, los planos principales coinciden con el plano de la lente. Las distancias focales serán, pues, las distancias de los focos al centro de la lente.

Así pues, la fórmula que nos relaciona las distancias del objeto a la lente y de la lente a la imagen, x, x' respectivamente, será:

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f'}$$

ya que los planos principales coinciden con la lente delgada, y siendo los índices de refracción extremos iguales, deben ser $-f=f'$ (según hemos visto al estudiar los sistemas centrados).

Podemos relacionar las distancias focales con los radios de curvatura de la siguiente forma: aplicando las fórmulas del dioptrio esférico a los dos dioptrios que constituyen la lente:

$$-\frac{n}{x}+\frac{n'}{x'}=\frac{n'-n}{R}$$

El primer dioptrio de radio R_1, $n=1$, $n'=N$; x es la distancia del objeto a la lente, y x'' la distancia de la imagen a la lente. Para el segundo dioptrio, de radio R_2, la imagen dada por el primero es el objeto, y x'' es la distancia del objeto a la lente, y llamamos x' a la distancia de la imagen (que será la verdadera imagen) a la lente. Para el segundo dioptrio, $n=N$, $n'=1$. Así pues, escribiremos:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{x}+\frac{N}{x''}&=\frac{N-1}{R_1}\\ -\frac{N}{x''}+\frac{1}{x'}&=\frac{1-N}{R_2}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\text{Sumando}\\ &-\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{N-1}{R_1}+\frac{1-N}{R_2}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\\ &\text{o sea}\\ &-\frac{1}{f}=\frac{1}{f'}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\end{aligned}$$

(Esta fórmula ya la habíamos deducido como caso particular de una lente gruesa si se podía considerar despreciable la distancia d frente a los radios de curvatura.)

Vamos a aplicar esta fórmula a las lentes según la disposición relativa de sus radios de curvatura:

En la biconvexa, R_1 es positivo y R_2 es negativo, luego $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ es positivo, y por lo tanto también f'.

En la planoconvexa, R_1 es positivo y R_2 es infinito, luego también es positiva f'.

En la concavoconvexa, R_1 y R_2 son positivos, pero $R_2 > R_1$, luego $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ es positivo; así pues, también lo es f'. Debido a que la f' de los tres tipos de lentes antes citados es positiva, estas lentes son convergentes.

En la bicóncava, R_1 es negativo y R_2 es positivo, luego $\frac{1}{-R_1} - \frac{1}{R_2}$ es negativo, y por lo tanto lo es también f'.

En la planocóncava, R_1 es negativo y R_2 es infinito, luego F' es negativa.

En la convexocóncava, R_1 y R_2 son negativos, pero $R_2 > R_1$, luego si $\frac{1}{-R_1} - \frac{1}{-R_2}$ es negativo, también lo es f'.

Por ser f' negativo, estas tres últimas lentes son divergentes.

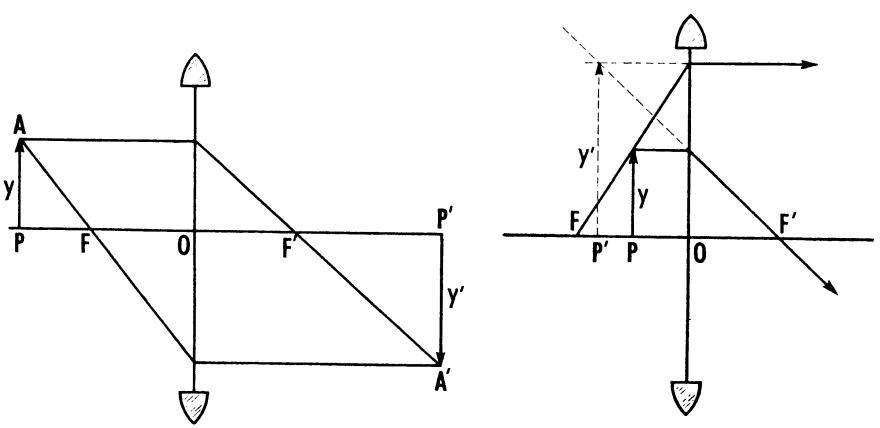


FIG. 85

Formación de imágenes en las lentes. — 1.° MÉTODO GRÁFICO (figura 85). Sea una lente convergente. Se traza un rayo paralelo al eje que parta del extremo A del objeto; a la salida de la lente debe pasar por el foco ima-

gen F'. Un rayo que parte de A y pasa por el foco objeto F, a la salida es paralelo al eje. El punto de intersección de los dos rayos emergentes (A') es la imagen de A. La imagen de AP es $A'P'$. En lugar de trazar el segundo rayo que pasa por el foco podíamos haber trazado un rayo que partiese de A y pasara por el centro de la lente. Este rayo no sufre desviación (ya que el centro es el centro óptico), y donde corte al rayo emergente anterior tendremos la imagen de A.

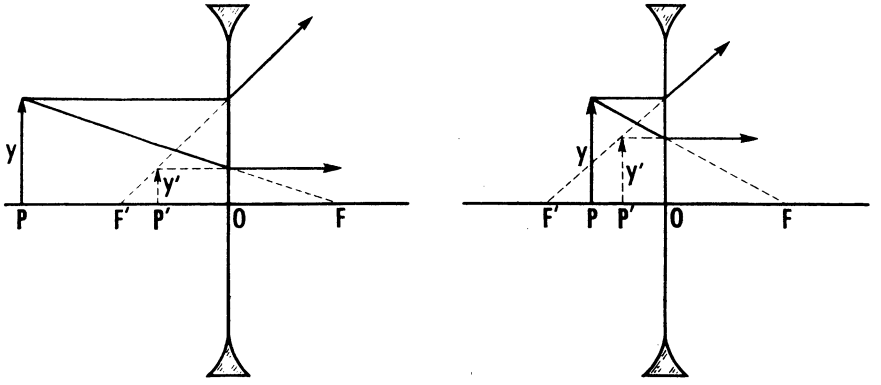


FIG. 86

Si la lente es divergente, procederemos de la misma forma (fig. 86), pero debemos tener en cuenta que el foco imagen está a la izquierda de la lente y el foco objeto a la derecha. La imagen se forma con las prolongaciones de los rayos, es una imagen virtual.

2.° MÉTODO ANALÍTICO. Aplicamos la fórmula

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{x'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{x}=\frac{x+f'}{f'x}; \qquad x'=\frac{f'x}{x+f'}$$

en las lentes convergentes f' es positivo. Como x es negativo,

$$x'=\frac{f'(-x)}{-x+f'}=\frac{f'x}{x-f'}$$

si $|x|>f'$ (objeto situado a distancia superior a la focal objeto), $x'>0$, imagen real; si $|x|<f'$ (objeto situado entre el foco objeto y la lente), $x'<0$, imagen virtual.

En las lentes divergentes, f' es negativo, siendo x negativo:

$$x'=\frac{-f'(-x)}{-x-f'} \qquad x'=\frac{-f'x}{f'+x}$$

La imagen es siempre virtual. El aumento lateral:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{f}{x + f'}$$

En las lentes convergentes,

$$\beta = \frac{x'}{x} = \frac{f'}{-x + f'}; \qquad y' = \frac{f'}{-x + f'} y$$

$$f' < |x| < 2f' \qquad |y'| > |y|$$

como x y x' tienen signo contrario, las y e y' también lo tendrán; luego la imagen es invertida.

Si $|x| > 2f'$ $|y| < |y'|$, la imagen es menor. Teniendo la x y la x' signos contrarios, la imagen es invertida.

Si $|x| < f'$ $|y'| > |y|$, la imagen es mayor. Siendo las x y x' ambas negativas, la imagen es derecha.

En las lentes divergentes f' es negativo, y siendo x también negativo, el aumento lateral

$$\beta = \frac{x'}{x} = \frac{-f'}{-x - f} = \frac{f}{x + f}; \qquad y' = \frac{f'}{f' + x} y \qquad \text{siempre} \quad y' < y$$

Tanto la x como la x' son negativas, luego y' es positivo como y; la imagen será derecha. Las imágenes producidas por una lente divergente son: virtuales, derechas y menores que el objeto. (Para un objeto real, x negativo.)

El aumento angular en todas las lentes vale

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{n}{n'} \frac{y}{y'} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{\beta}$$

Problema: Un hombre se acerca a una lente convergente de 1 m de distancia focal, con velocidad constante. Forma su imagen en una pantalla, donde podemos medir la correspondiente altura. Cuando el hombre dista 6 m de la lente, la imagen tiene una altura de 34 cm, y al cabo de 2,5 segundos se forma una imagen (desplazando convenientemente la pantalla) de 68 cm de altura. ¿Cuál es la velocidad de aquel hombre?

En la primera posición: $x'_1 = \dfrac{f x_1}{x_1 - f}$ $\qquad \dfrac{y'_1}{y} = \dfrac{x'_1}{x_1} = \dfrac{f}{x_1 - f}$

En la segunda posición: $x'_2 = \dfrac{f x_2}{x_2 - f}$ $\qquad \dfrac{y'_2}{y} = \dfrac{x'_2}{x_2} = \dfrac{f}{x_2 - f}$

$$\frac{y'_1}{y'_2} = \frac{x_1 - f}{x_2 - f}$$

$$\frac{y'_1}{y'_2} = \frac{0{,}34}{0{,}68} = \frac{1}{2} \qquad f = 1 \text{ m} \qquad x_1 = 6 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1 - 6} \qquad -5 = 2x_2 - 2 \qquad x_2 = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ m}$$

Camino recorrido en los 2,5 segundos: $l = x_1 - x_2 = 6 - 3{,}5 = 2{,}5$ m

$$\text{Velocidad: } v = \frac{l}{t} = \frac{2{,}5}{2{,}5} = 1 \text{ m/s}$$

Potencia de una lente y de un sistema de lentes yuxtapuestas. — Se llama *potencia* de una lente al recíproco de su distancia focal. Se mide en dioptrias, si la distancia focal la medimos en metros. Por ejemplo, una lente convergente de distancia focal 50 cm tiene una potencia $p = \frac{1}{0{,}5} = 2$ dioptrias. Si la lente es divergente y de la misma distancia focal, entonces $p = -\frac{1}{0{,}5} = -2$ dioptrias. Un sistema de lentes constituye una combinación de sistemas ópticos, y sabemos que la distancia focal imagen $F'H'$, que en este caso será la distancia a la segunda lente del foco imagen, según vimos en la combinación de sistemas ópticos,

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{D}; \qquad f' = \frac{f_1' f_2'}{-D} = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - d}$$

$$(D = d - f_1' + f_2' = d - f_1' - f_2')$$

El recíproco de la distancia focal del sistema será

$$\frac{1}{f'} = \frac{f_1' + f_2' - d}{f_1' f_2'} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'} - \frac{d}{f_1' f_2'}$$

Si las lentes están yuxtapuestas, $d = 0$, y la potencia será:

$$p = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'}$$

Si las lentes son divergentes o una de ellas lo es, se escribe la f' correspondiente con signo menos. La potencia total de la combinación de una lente convergente y otra divergente puede ser positiva o negativa, según que la potencia de la lente convergente sea mayor o menor que la de la lente divergente.

Podemos dar una demostración elemental de la fórmula anterior (para lentes yuxtapuestas). Consideremos que la imagen del foco de la primera lente respecto a la segunda será el foco del sistema.

Aplicando la fórmula de las lentes:

$$-\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_2'}; \qquad \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$$

Problema. Disponemos de una lente convergente de distancia focal 40 cm. Necesitamos una lente convergente de potencia una dioptria. ¿Cuál

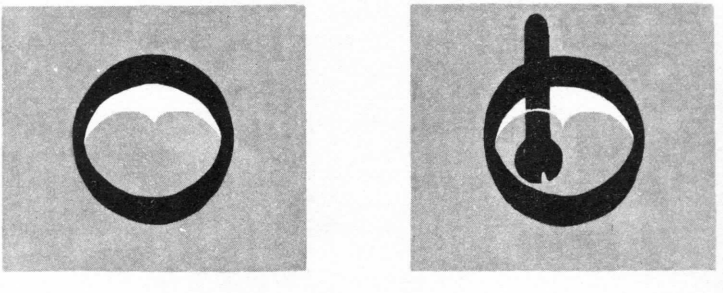
debe ser la distancia focal de una lente divergente que yuxtapuesta a la primera nos forme un sistema de potencia la deseada?

$$\frac{1}{0{,}4}+\frac{1}{f'}=1\,;\qquad \frac{1}{f'}=1-\frac{1}{0{,}4}=1-2{,}5=-1{,}5$$

$$f'=-\frac{1}{1{,}5}=-\frac{2}{3}\ \text{m}$$

Será una lente divergente de distancia focal $f'=-\frac{2}{3}$ m.

Idea de las principales aberraciones de lentes y espejos. — Un haz luminoso de gran abertura que incide en un sistema óptico, a la salida no converge en un punto. El sistema no es rigurosamente estigmático para un haz que no parta de un punto del eje y que no sea de rayos paraxiales. El haz antes citado a la salida del sistema está formado por rayos que, en lugar de converger en un punto, son tangentes a una superficie llamada *cáustica*. Si colocamos una pantalla a distintas distancias, los rayos emergentes nos darán una imagen sección de la cáustica determinada por la pantalla. Puede observarse fácilmente una sección de una cáustica colocando una servilletera o un anillo de forma que reciba un haz luminoso. Si lo hemos colocado sobre un papel blanco, observaremos una superficie iluminada que tiene una forma como la indicada en el grabado adjunto (*a*). Podemos comprobar que los rayos reflejados en la superficie del anillo (que en este caso puede considerarse un espejo cilíndrico) son tangentes a la cáustica, colocando un objeto vertical que produzca sombra dentro del anillo. La sombra (supresión de un pincel incidente) será tangente a la sección de la superficie cáustica formada sobre el papel, lo cual prueba que los rayos después de reflejados son tangentes a la superficie antes citada (*b*).



a b

Caústica en un aro

Los defectos de las imágenes producidas por un sistema óptico centrado, llamadas *aberraciones,* pueden clasificarse en:

Aberración esférica. — Un punto luminoso que se encuentra sobre el eje del sistema óptico manda un haz de rayos ancho. A la salida no convergen en un punto.

Astigmatismo. — El punto luminoso no está en el eje, y aunque el pincel de rayos que envía al sistema sea estrecho, a la salida los rayos, en lugar de converger en un punto, pasan por dos líneas perpendiculares, llamadas focales.

Coma. — Un punto luminoso situado fuera del eje del sistema manda un haz de rayos de gran abertura; a la salida del sistema, en lugar de converger en un punto, forman una imagen parecida a un cometa (de ahí su nombre).

Curvatura de campo. — Aberración ligada al astigmatismo, se presenta al formarse la imagen de un segmento rectilíneo perpendicular al eje, cuya imagen es un arco de curva no contenida en un plano perpendicular al eje.

Distorsión. — Debido al distinto valor que presenta el aumento lateral, según la distancia de un punto luminoso al eje del sistema, resulta que la imagen de un objeto extenso se ve deformada.

Todas las aberraciones anteriores son debidas al sistema óptico y a la posición relativa de los puntos luminosos respecto al citado sistema. Un espejo plano no produce ninguna aberración. Existe otra aberración que se presenta siempre que la luz empleada no sea monocromática. A esta aberración se le llama cromática, y se observa al utilizar luz blanca. Es debida al hecho, citado al hablar de índice de refracción, de que dicho índice es distinto para cada longitud de onda. Esto hace que los rayos emergentes sean distintos para cada longitud de onda, y este fenómeno constituye la llamada *dispersión de la luz.*

Vamos ahora a considerar de una manera elemental y abreviada cada una de las aberraciones.

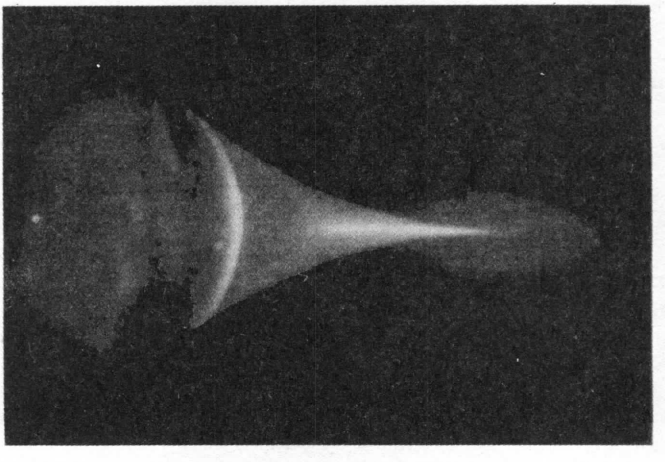
ABERRACIÓN ESFÉRICA. Supongamos un punto luminoso en el eje principal del sistema óptico y que de él parte un haz de rayos de gran abertura. Los rayos emergentes pertenecientes a rayos incidentes que estén igualmente inclinados respecto al eje convergerán en un mismo punto del eje. De aquí que la imagen del punto luminoso sea un segmento sobre el eje. El origen y el extremo de este segmento son los puntos de intersección de los rayos más inclinados respecto al eje y los más próximos a él (en una lente convergente). Este segmento, debido a la simetría de revolución respecto al eje, es una hoja de la cáustica degenerada. La otra hoja de la cáustica la obtenemos por rotación alrededor del eje del sistema de los rayos emergentes correspondientes a los incidentes contenidos en un mismo

plano que pase por el eje. En la fotografía adjunta se observa el fenómeno descrito. Cortando dicha superficie con un plano normal al eje encontraremos distintas imágenes según la posición de dicho plano. De estas imágenes existe una de menor diámetro, llamada *círculo de menor difusión.*

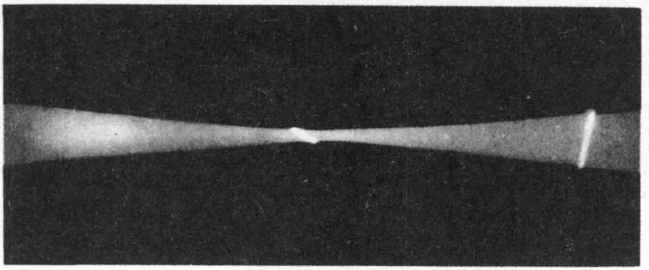
Para evitar esta aberración esférica podemos eliminar los rayos marginales con un diafragma normal al eje (disco opaco con un orificio, el cual colocamos centrado al eje) que nos deje pasar sólo los rayos paraxiales. Debido a que los rayos marginales convergen a menor distancia de la lente si es convergente, y a mayor distancia si es divergente, puede asociarse de manera adecuada una lente convergente con otra divergente para evitar la aberración considerada.

ASTIGMATISMO. Si deseamos hallar la imagen de un punto alejado del eje, aunque coloquemos un diafragma que nos limite un pincel de rayos, por estar éstos inclinados respecto al eje, obtendremos un pincel de rayos emergentes que no convergen en un punto, sino en dos segmentos perpendiculares llamados focales de Sturm, uno de ellos en el plano determinado por el punto luminoso y el eje del sistema (focal radial), y el otro perpendicular a éste (focal sagital). (Véase fotografía adjunta.)

COMA. Cuando el punto luminoso está alejado del eje y además manda un haz de rayos de gran abertura, la correspondiente cáustica ya no presenta simetría de revolución como en el caso de estar el punto sobre el eje. La figura obtenida por una pantalla a la salida del sistema, que será la intersección de la cáustica por el plano de la pantalla, serán figuras que dependen de la posición de la pantalla y, según dijimos antes, presentan



Aberración esférica en una lente.



Astigmatismo de una lente para rayos muy inclinados donde se observan las dos focales.

un aspecto parecido a un cometa. Este efecto se hace más patente cuanto más alejado esté el punto del eje. Colocando un diafragma adecuado limitaremos el haz y solamente nos queda el efecto de astigmatismo.

CURVATURA DEL CAMPO. Consideremos un objeto plano perpendicular al eje. Las focales correspondientes a sus distintos puntos tienen una envolvente que debe pasar por un punto del eje (el conjugado del punto intersección del objeto con el eje, para el cual el sistema es estigmático). La imagen del objeto plano no es plana; generalmente son dos superficies curvas, los lugares geométricos de las dos focales correspondientes a cada punto del objeto. El no corregir esta aberración es un problema notable en una máquina fotográfica, aunque estuviera corregido el astigmatismo.

DISTORSIÓN. La distorsión va ligada a la aberración esférica. Supongamos un cuadrado, colocamos un diafragma entre el objeto y el sistema. Puede darse el caso de que los rayos que parten de puntos más alejados del eje incidan en el sistema a mayor distancia del eje que los rayos que parten del objeto más alejados del eje. En este caso, debido a que (si el sistema es convergente) los rayos marginales emergentes cortan al eje en puntos más próximos que los rayos emergentes procedentes de incidencia paraxial, los vértices del cuadrado citado quedan más próximos que lo que debiera corresponder; de esta forma se obtiene distorsión en barrilete (o tonel). En caso contrario, la distorsión sería en corsé (cuando los vértices estarían más distantes de lo debido. En la figura 87 representamos una cuadrícula con las distorsiones (*a*) en barrilete y (*b*) en corsé. Hay que colocar el diafragma en posición adecuada para evitar esta distorsión.

ABERRACIÓN CROMÁTICA. Para evitar la aberración cromática (citada antes) debemos asociar al sistema otra que produzca dispersión en sentido contrario. Para una lente convergente podemos asociar otra divergente de distinto índice de refracción (por ejemplo, una de flint y otra de crown). Para una imagen visual, generalmente se corrigen los colores rojo y verde, es decir, que a la salida del sistema total los rayos correspondientes a estos

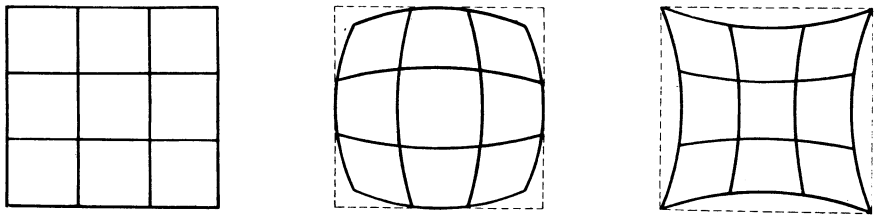


FIG. 87

dos colores formen la imagen en un mismo punto. Al asociar una lente convergente con otra divergente tenemos la ventaja de poder corregir simultáneamente la aberración de esfericidad calculando convenientemente los correspondientes radios de curvatura. En los microscopios se acostumbra a utilizar el sistema *apocromático,* que corrige la aberración de tres colores, corrigiéndose la aberración esférica para dos colores.

Diafragmas y pupilas de un sistema. — En un sistema óptico consideremos un punto objeto P en el eje que nos produce una imagen P', que estará también en eje. Para que los rayos sean paraxiales, habremos intercalado varios diafragmas. Se llama *pupila de entrada* del sistema a la imagen del diafragma producido por la parte del sistema óptico anterior al diafragma y que se vea desde el punto objeto con el menor ángulo. Al correspondiente diafragma se le llama *diafragma de abertura* o *iris,* y al ángulo bajo el cual se ve la pupila de entrada desde el punto objeto se le llama *ángulo de abertura* del sistema; los rayos comprendidos dentro de este ángulo son los que intervienen en la formación de la imagen. Si el diafragma iris está a la entrada del sistema, su imagen, y por lo tanto la pupila de entrada, coincide con el iris. Uniendo el centro de la pupila de entrada con la imagen del diafragma que se vea desde el citado punto con el ángulo más pequeño, tendremos un ángulo llamado *ángulo del campo óptico.* El sistema óptico puede formar la imagen de todos los puntos situados dentro del ángulo antes citado; de esta forma delimitamos el campo óptico del sistema. Al diafragma que cumpla la citada condición se le llama *diafragma de campo.* A la imagen, formada por la parte posterior del sistema, del diafragma iris se le llama *pupila de salida,* y al ángulo bajo el cual se ve dicha pupila desde el punto imagen se le llama *ángulo de proyección* del sistema.

Espejos esféricos y espejos planos: deducción de las fórmulas. — Podemos estudiar la reflexión como un caso particular de la refracción, y así poder utilizar las fórmulas obtenidas de los dioptrios esféricos a los espejos esféricos. Según el convenio de signos, la reflexión puede expresarse

como $i = -r$; es decir, el ángulo de incidencia igual al de reflexión. En la refracción $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n'}{n}$; si $i = -r$. debe ser $n = -n'$. Así podemos considerar que en las fórmulas dadas para la refracción, sustituyendo $\frac{n'}{n}$ por —1, o n' por $-n$, tendremos como caso particular la reflexión.

Consideremos un espejo esférico convexo. En él R es positivo. Aplicando la fórmula del dioptrio esférico $f = \frac{n'}{n' - n} R$ y sustituyendo n por $-n'$, tenemos que la distancia focal $f = \frac{n'}{n' + n'} R = \frac{R}{2}$; como

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n'}{n} = -(-1) = 1, \qquad f = f' = \frac{R}{2}$$

Los dos focos coinciden en el punto medio del segmento que une el vértice con el centro de curvatura.

Para hallar la posición de la imagen, conociendo la distancia x del objeto al espejo, aplicaremos la fórmula de los dioptrios esféricos:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1; \quad f = f' = \frac{R}{2}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}; \quad \frac{1}{x'} = \frac{2}{R} - \frac{1}{x}$$

$$x' = \frac{Rx}{2x - R}; \quad \text{como } x \text{ es negativo,} \quad x' = \frac{R(-x)}{2(-x) - R} = \frac{Rx}{2x + R}$$

x' es siempre positivo. Siendo el espejo convexo, la imagen será siempre virtual.

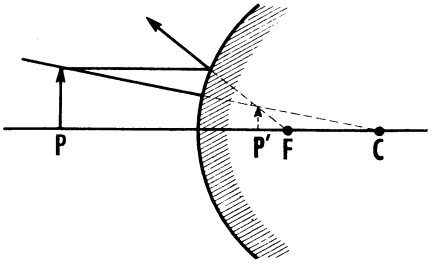


FIG. 88

Para la construcción gráfica, se traza un rayo paralelo al eje, que después de reflejado pasa por el foco. Otro rayo que pase por el centro de curvatura no se desvía. De esta forma obtenemos gráficamente las imágenes (fig. 88).

En los espejos cóncavos, R es negativo. Las fórmulas correspondientes serán:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=-\frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{x'}=-\frac{2}{R}-\frac{1}{x} \qquad \text{siendo } x \text{ negativo}$$

$$\frac{1}{x'}=-\frac{2}{R}+\frac{1}{x}=\frac{-2x+R}{Rx}; \qquad x'=\frac{Rx}{R-2x}$$

La imagen es virtual si $2x < R$, ya que x' es positivo (se forma dentro del espejo) (fig. 89, *b*); la imagen es real (a la izquierda del espejo) si $R < 2x$ (x' negativo) (fig. 89, *a*).

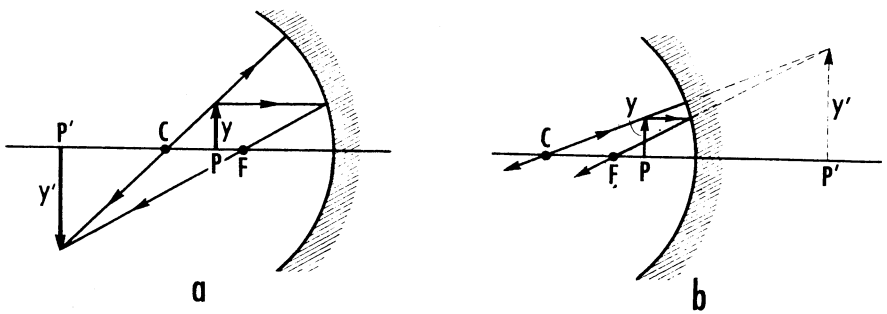


FIG. 89

Aumento lateral:

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{n}{n'}\,\frac{x'}{x}=-\frac{x'}{x}; \qquad \text{siendo } x \text{ negativo} \qquad \beta=\frac{x'}{x}$$

En los espejos convexos

$$\beta=\frac{R}{2x+R}; \qquad y'=\frac{R}{2x+R}\,y$$

la imagen es siempre menor que el objeto. Como y' es positiva si lo es y, la imagen **es derecha.**

En los espejos cóncavos

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}=\frac{R}{R-2x}; \qquad y'=\frac{R}{R-2x}\,y$$

Si $2x > R$, $y' < 0$, la imagen es invertida. Si $2x < R$, $y' > 0$, la imagen es derecha.

Si $R < x < \frac{R}{2}$, la imagen es real, invertida y mayor. Si $x > R$, la imagen es real, invertida y menor.

El aumento angular:

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{x}{x'}$$

En los espejos convexos

$$\gamma = \frac{2x + R}{R} = \frac{2x}{R} + 1$$

En los espejos cóncavos

$$\gamma = \frac{R - 2x}{R} = 1 - \frac{2x}{R}$$

Problema: Un automóvil lleva un espejo retrovisor (espejo convexo) de 40 m de radio de curvatura y que tiene una anchura de 12 cm. Un automovilista observa la carretera situado a 70 cm del espejo. ¿Cuál es el ancho de carretera que ve a una distancia de 50 m?

En la figura 90 vemos que se verifica (debido a su gran radio, *MNQ* pueden considerarse en línea recta):

$$\frac{MN}{y'} = \frac{ON}{OP'} = \frac{OQ}{OH} \qquad \frac{MN}{y'} = \frac{d}{d + x'}$$

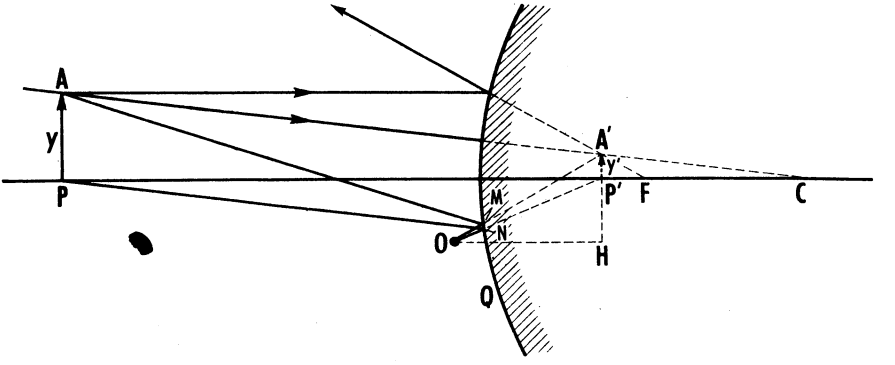


FIG. 90

siendo *MN* anchura del espejo; y', tamaño de la imagen; d, distancia del observador al espejo; x distancia del objeto al espejo.

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \qquad y = \frac{x}{x'}\, y' = \frac{x}{x'}\, \frac{d + x'}{d}\, MN = \frac{2x + R}{R}\, \frac{d + \dfrac{R\,x}{2x + R}}{d}\, MN$$

$$y = \frac{(2x + R)\, d + R\, x}{R\, d}\, MN$$

$x = 50$ m
$R = 40$ m
$d = 0{,}7$ m
$MN = 0{,}12$ m

$$y = \frac{(100 + 40) \cdot 0{,}7 + 50 \cdot 40}{40 \cdot 0.7}\, 0{,}12 = 8{,}988 \text{ m}$$

La anchura vista es de unos 9 m.

Espejos planos. — Si en la fórmula de los espejos hacemos $R = \infty$, queda (siendo x negativo):

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=0; \qquad \frac{1}{x'}=\frac{1}{x}; \qquad x'=x$$

x' es positiva; por lo tanto, la imagen se forma detrás del espejo, es virtual. El aumento lateral

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}=1; \qquad y'=y$$

la imagen y el objeto tienen las mismas dimensiones. La imagen es derecha (y' tiene el mismo signo que y).

Supongamos (fig. 91) un observador (cuyo ojo podemos considerar reducido a un punto) que ve la imagen de un objeto AB dada por un espejo plano E. La porción de espejo necesaria es MN. Si el ojo del observador

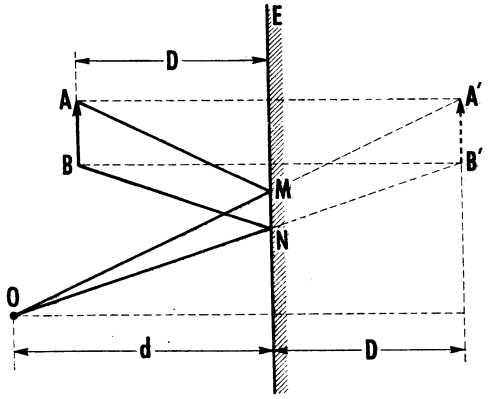


FIG. 91

está situado en O a la distancia d del espejo, y AB dista D del mismo espejo, de los triángulos semejantes OMN y $OA'B'$ deducimos

$$\frac{MN}{A'B'}=\frac{ON}{OB'}, \quad \text{pero} \quad \frac{ON}{OB'}=\frac{d}{d+D}; \quad \text{así pues,} \quad MN=AB\cdot\frac{d}{d+D}$$

La porción de espejo necesaria sólo depende de las distancias de O y de AB al espejo y de la longitud AB.

Sea un espejo E (fig. 92) Un rayo incidente IO se refleja según OR. Si hacemos girar el espejo un ángulo α, ocupa la posición E'. El rayo reflejado correspondiente al mismo rayo incidente es el OR'. Vamos a deter-

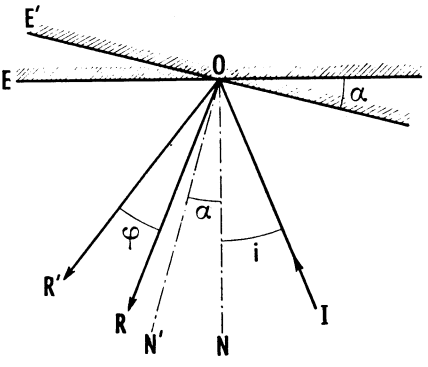


FIG. 92

minar el ángulo formado por OR y OR'. Según las leyes de la reflexión, y observando la figura, vemos que

$$IOR = 2i; \qquad IOR' = 2(i + \alpha);$$

$$\varphi = ROR' = IOR' - IOR = 2(i + \alpha) - 2i = 2\alpha$$

Es decir, el ángulo que ha girado el rayo reflejado al girar el espejo un cierto ángulo es igual al doble de dicho ángulo.

Problema. Un observador se acerca a un espejo plano con una velocidad constante v. ¿Con qué velocidad se acerca su imagen a él?

Supongamos que dista x del espejo; la distancia a su imagen es $2x$.

$$v' = \frac{e}{t} = \frac{2x}{t} = 2v \quad \text{(ya que } v = \frac{x}{t}\text{)}; \qquad v' = 2v$$

Su imagen se acerca con una velocidad doble que la del observador.

PRÁCTICAS

Medida de la distancia focal de una lente. —Supongamos una lente convergente. Un haz de rayos paralelos al eje forma su imagen en el foco. Tomamos una pantalla y la desplazamos detrás de la lente colocando a dicha lente de forma que los rayos solares incidan normalmente a ella hasta que se forma un punto luminoso sobre la pantalla.

Si la lente es divergente se puede asociar a otra convergente de mayor potencia (basta comprobar que el sistema forma una imagen real). Operando

igual que antes obtendremos la distancia focal del sistema. Sabiendo que la potencia total es igual a la suma de potencias obtendremos la potencia de la lente divergente (la cual será negativa).

Observación de la formación de imágenes en lentes y espejos y comprobación de sus fórmulas. — Tomemos una lente convergente y la colocamos en un soporte adecuado de forma que la podamos desplazar a lo largo de una regla graduada. Tomamos una lámpara colocándola detrás de una figura (una flecha, por ejemplo) obtenida formando un orificio de la forma deseada en un papel grueso opaco o cartón. Puede ponerse un trozo de papel fino sobre del orificio y tendremos una imagen luminosa. Colocada esta imagen en el extremo de la regla graduada y en el otro una pantalla (una hoja de cartulina) moveremos la lente hasta que se forme en la pantalla la imagen del objeto del otro extremo. Midiendo las distancias del objeto a la lente y de la lente a la pantalla tendremos la x y la x' de la fórmula de las lentes. Conocida la distancia focal (o la medimos como en el caso anterior) podemos comprobar la fórmula de las lentes. Este método sirve también para la medida de la distancia focal. Midiendo cuidadosamente las distancias objeto-lente y lente-imagen, aplicando la fórmula podemos determinar la distancia focal.

Podemos comprobar el aumento de la lente. Medimos la altura del objeto y de la imagen. El cociente entre la altura de la imagen y la del objeto es el aumento lateral. Podemos comprobar que dicho aumento es igual al cociente entre x' y x. Para una lente divergente la podemos asociar a una convergente de mayor potencia para obtener una imagen real y después de medir las distancias x y x' determinar la distancia focal del sistema, y de aquí, conociendo la potencia de la lente convergente, hallar la potencia de la lente divergente y su distancia focal.

Para obtener la imagen en un espejo cóncavo operaremos de forma parecida a antes. Colocaremos la imagen luminosa un poco desplazada del eje de la regla graduada. La pantalla la colocaremos junto al objeto de forma que quede al otro lado de la regla. Entre la imagen y la pantalla colocaremos una cartulina a manera de tabique separador. Colocaremos el espejo en un soporte adecuado sobre la regla y lo desplazaremos lentamente hasta que la imagen del objeto luminoso sobre la pantalla sea nítida y, según veremos, del mismo tamaño, aunque invertido. En este caso, siendo $x' = x$, el aumento lateral es -1. Para que $x' = -x$, debe ser $x = R$, ya que:

$$x = \frac{Rx}{R - 2x} \qquad \text{si} \qquad x' = -x$$

$$-x = \frac{Rx}{R - 2x} \qquad \begin{aligned} -R + 2x &= R \\ 2x &= 2R \\ x &= R \end{aligned}$$

luego,

$$f = \frac{R}{2} = \frac{x}{2};$$

así pues, hemos determinado la distancia focal del espejo.

Si se trata de un espejo convexo, la imagen es virtual y no la podemos formar sobre una pantalla. Para determinar su distancia focal podemos utilizar el siguiente artificio. Colocamos un objeto a cierta distancia del espejo.

Entre el objeto y el espejo convexo colocamos un espejo plano de forma que quede en la parte inferior. Observando el espejo plano por detrás del objeto, debe tapar la mitad inferior del espejo convexo. Veremos dos imágenes, una la que nos da el espejo convexo y otra la formada por el espejo plano. Desplazaremos el espejo plano hasta que las imágenes dadas por los dos espejos parezcan coincidir y se vean una a continuación de la otra, sin paralaje.* Midiendo la distancia del objeto al espejo plano tendremos la distancia del objeto a la imagen, que será el doble de esta distancia. La distancia de la imagen al espejo convexo será igual a la diferencia entre el doble de la distancia del objeto al espejo plano y la distancia objeto - espejo convexo. De esta forma, conociendo x y x' podemos hallar f.

* Moviendo lateralmente la cabeza a un lado y a otro, las imágenes no se desplazan.

CAPÍTULO XXIV

INSTRUMENTOS ÓPTICOS

El ojo como instrumento óptico. — La forma del ojo es sensiblemente esférica (fig. 93). Su envoltura externa se llama esclerótica, que en su parte anterior es transparente y se llama córnea. La curvatura de la córnea es un poco mayor que el resto del globo ocular. La esclerótica está revestida interiormente por una membrana oscura, llamada coroides, que en su parte anterior, al llegar a la córnea, se separa de la esclerótica y queda formando el diafragma iris, con una abertura circular llamada pupila, la cual regula

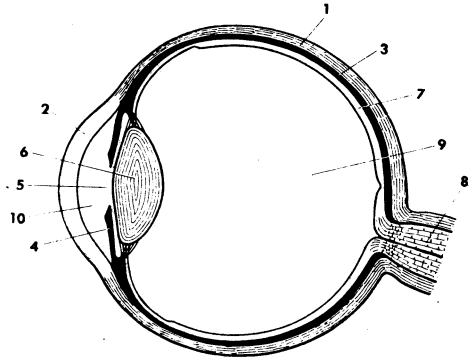


FIG. 93. — Globo ocular cortado horizontalmente; 1, esclerótica; 2, córnea; 3, coroides; 4, iris; 5, pupila; 6, cristalino; 7, retina; 8, nervio óptico; 9, humor vítreo; 10, humor acuoso.

la intensidad de la luz que penetra en el ojo (además de diafragmar cualquier haz de rayos incidentes), aumentando o disminuyendo su diámetro, el cual varía de 2 a 8 mm. Inmediatamente detrás del iris se encuentra el cristalino, lente convergente que no es totalmente homogénea, cuyo índice de refracción medio es 1,42, y su espesor 3,6 mm. Esta lente, que es elástica, cambia de curvatura por la acción del músculo ciliar; de esta forma varía su distancia focal. El fondo del ojo está recubierto por la retina, en la cual terminan gran número de fibras del nervio óptico. En la retina se

forman las imágenes de los objetos exteriores. La retina está constituida por células cilíndricas (bastoncitos) y cónicas (conos), dispuestas una al lado de otra y perpendiculares a la superficie de la retina. Las células más sensibles a la luz son los conos. En las distintas partes de la retina, la distribución de conos y cilindros es diferente, de aquí que la sensibilidad varíe. La máxima sensibilidad está en la mancha amarilla, que es donde no hay más que conos y en gran cantidad; dicha mancha está situada en la parte de la retina opuesta a la pupila, casi junto al eje óptico del sistema; su diámetro es de unos 2 mm. A la entrada del nervio óptico, el ojo no tiene sensibilidad (no hay conos ni bastoncitos); a este punto se le llama punto ciego. Entre la córnea y el cristalino existe un líquido transparente llamado humor acuoso, cuyo índice de refracción es de 1,336; entre el cristalino y la retina existe un líquido transparente y viscoso de índice de refracción prácticamente igual al anterior.

Vamos a considerar un ojo normal como un sistema óptico. El ojo enfocado al infinito, considerado como sistema óptico, está representado en la figura 94. Como los índices extremos no son iguales, la relación entre las distancias focales

$$-\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} = \frac{22{,}74}{-17{,}06} = 1{,}336$$

Los planos principales casi coinciden; su distancia es de 0,25 mm. Estando el plano principal objeto a 1,35 mm detrás de la córnea. Dada la pequeña distancia de los planos principales, pueden suponerse coincidentes

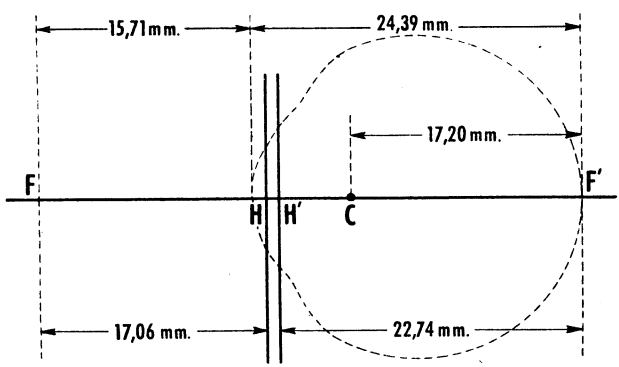


FIG. 94

y considerar el sistema óptico que constituye el ojo como instrumento óptico, como un dioptrio esférico de índice de refracción 1,33 colocado en el aire y cuyo vértice estaría a unos 2 mm detrás de la córnea, el centro a

6 mm también detrás de la córnea, y distancias focales objeto e imagen respectivamente —17 mm y 23 mm. Puede también considerarse equivalente a una lente delgada en el aire situada en el centro óptico C (a 6 mm detrás de la córnea) y de distancia focal 17 mm.

El campo de visión del ojo se extiende a todos los objetos situados dentro de un cono de vértice la pupila y de abertura unos 130°. Pero la visión nítida es para las imágenes formadas sobre la mancha amarilla; entonces el campo de visión es mucho menor, siendo el ángulo de unos 45′. Dada la movilidad del globo ocular, pueden observarse objetos por visión directa de forma que las imágenes se formen en la mancha amarilla, explorando un objeto extenso. Sin mover la cabeza, sólo con el movimiento ocular, el campo de visión nítida alcanza el valor de unos 40°.

Estando el foco imagen del sistema óptico que constituye el ojo sobre la retina, las imágenes de los objetos alejados se forman directamente sobre la retina. Cuando queremos ver con nitidez objetos cercanos debemos acomodar, es decir el músculo ciliar varía la curvatura del cristalino de modo que la imagen se forme en la retina. Cuando el objeto está a distancia inferior a 15 cm, un ojo normal no puede verlo con nitidez, debido a que no se puede acomodar la visión a estas pequeñas distancias. A esta distancia que varía de 15 a 20 cm se le llama *distancia mínima de visión neta* (o distinta). Al lugar donde está situado el punto observado en este caso se le llama *punto próximo*. Se llama *punto remoto* al más lejano lugar donde puede estar un objeto para poder verlo con nitidez; para un ojo normal está en el infinito.

Defectos de convergencia y de acomodación. — Los defectos de convergencia son debidos a que la curvatura del cristalino es distinta de la normal. Estos defectos son:

MIOPÍA. Cuando la curvatura del cristalino sin acomodación es demasiado elevada. El foco imagen del sistema óptico queda delante de la retina de modo que la imagen de un punto alejado se forma antes de la retina. El punto remoto estará situado a cierta distancia. En este caso el punto próximo estará más cercano a la lente que en el caso de ojo normal; la distancia mínima de visión neta puede ser de unos 5 cm. Para corregir este defecto se usa una lente divergente, de manera que la posición del foco imagen sea la correcta. La distancia focal de la lente divergente usada será igual a la distancia del punto remoto (distancia máxima de la visión distinta), ya que esta lente formará una imagen virtual en el punto remoto de los rayos que provienen del infinito y entrarán en el ojo como si viniesen del punto remoto, que es el foco de la lente divergente. Además del punto remoto, el punto próximo de un ojo miope corregido vuelve a ser el normal.

HIPERMETROPÍA. Es cuando el cristalino sin acomodar es poco convergente. El foco imagen está detrás de la retina; en este caso la imagen de los objetos muy alejados se forma detrás de la retina; para verlos es

necesario acomodar. En este caso el punto remoto es virtual y el punto próximo está más lejos de lo normal (por ejemplo, puede valer 50 cm). Para corregir este defecto se usan lentes convergentes de distancia focal igual a la distancia máxima de la visión neta, pues los rayos procedentes de puntos muy alejados formarán su imagen real en el punto remoto y de esta forma el ojo verá los objetos lejanos sin acomodación. Al mismo tiempo, si el ojo conserva la facultad de acomodación, la distancia mínima de la visión neta será la normal.

DEFECTOS DE ACOMODACIÓN. La facultad de acomodación disminuye con la edad de la persona. El punto remoto se mantiene en el infinito, pero el punto próximo se aleja. A este defecto se le llama *presbicia.* Un ojo normal que con el tiempo se transforme en présbita deberá usar lentes convergentes para ver objetos cercanos (por ejemplo, para leer), y verá los objetos lejanos sin necesidad de lentes. Cuando la facultad de acomodación es casi nula, la persona necesitará varias lentes convergentes de distancia focal aproximadamente igual a la distancia del objeto que desea ver, ya que entonces el haz incidente es paralelo y forma su imagen en la retina. Si la persona es miope y con la edad se hace présbita, necesitará lentes convergentes para ver objetos cercanos, y lentes divergentes para objetos alejados.

Además de los citados defectos de convergencia y de acomodación, existe otro defecto, debido a que las superficies que limitan los dioptrios en el ojo no son de revolución y sus secciones meridianas tienen distinta curvatura. Se pone de manifiesto este defecto, llamado *astigmatismo,* al observar dos rectas perpendiculares situadas en un plano, se verá claramente una de ellas o la otra según que acomode a una u otra de las dos focales (citadas al hablar de astigmatismo de sistemas). Para corregir este defecto se usan lentes cilíndricas adecuadas, de manera que siendo sus generatrices paralelas a uno de los planos de simetría del ojo, tenga una convergencia tal, que logre que la focal paralela a sus generatrices coincida con la otra.

Agudeza visiual. — Sean dos puntos luminosos A y B; sus imágenes formadas en la mancha amarilla son A' y B'. Si las imágenes se forman sobre el mismo cono, la sensación de imagen es única y los puntos se perciben como un punto único. Si las imágenes A' y B' se forman en dos elementos distintos de la mancha amarilla, percibiremos los puntos como separados. Designemos por α al ángulo que forman los dos puntos unidos con el centro óptico del ojo. Llamaremos *agudeza visual* del ojo al menor valor del ángulo α para el cual los puntos A y B se perciban como separados.

Puede determinarse experimentalmente colocando una regla graduada en milímetros en posición vertical y observándola normalmente a distancias cada vez mayores hasta que no se perciban los trazos netamente separados. El ángulo, expresado en radianes, que forma el centro óptico del ojo con los dos trazos centrales es la agudeza visual del ojo del observador.

Como el ángulo es muy pequeño, puede sustituirse el ángulo por la tangente, y entonces tenemos: tangente de la mitad del ángulo, igual a la mitad de la distancia entre trazos dividido por la distancia; luego el ángulo aproximadamente será igual a la distancia entre trazos dividido por la distancia. En este caso, la distancia entre trazos es un milímetro. Expresando la distancia en milímetros y hallando el cociente tendremos la agudeza visual. Su valor es del orden de $3 \cdot 10^{-4}$ radianes; o sea empezaremos a no distinguir con nitidez los trazos a partir de 3 m.

Hay que tener presente que para un mismo observador la agudeza visual depende de la forma de los objetos observados, del brillo de los mismos, del fondo frente al cual están situados y de la fatiga ocular del observador debida a reiteradas observaciones.

La mínima distancia entre dos puntos para que puedan verse netamente separados será cuando los observemos a una distancia igual a la mínima distancia de visión neta. Para un ojo normal esta distancia vale unos 15 cm. La separación de los dos puntos debe ser como mínimo

$$3 \cdot 10^{-4} \cdot 15 \text{ cm} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Un ojo miope para el cual la mínima distancia de visión neta es menor, por ejemplo 5 cm, la mínima distancia entre dos puntos para que se los vea netamente separados es menor; en nuestro ejemplo sería

$$3 \cdot 10^{-4} \cdot 5 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Un miope contemplando un objeto a la mínima distancia de visión neta ve más detalle que un observador con la vista normal contemplando a la mínima distancia de visión neta.

Lupa. — Es una lente convergente con la cual, colocando un objeto de forma adecuada, percibiremos su imagen ampliada. Así pues, dos puntos de un objeto se verán bajo un ángulo mayor y podremos ver separados dos puntos que a simple vista no era posible distinguir. Según lo dicho al final del párrafo anterior, deducimos que la lupa, al aumentar la convergencia del ojo, aumenta la facultad de poder distinguir entre sí dos puntos próximos y por lo tanto observar un objeto con mayor detalle.

Para que la imagen se vea derecha y mayor, es necesario que el objeto esté entre la lente y el foco objeto, y para verla con nitidez debe estar situado dicho objeto a una distancia igual o mayor que la distancia mínima de visión neta. Si queremos contemplar la imagen sin acomodación, debe estar el objeto en el plano focal objeto, ya que entonces la imagen se forma en el infinito.

FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LA LUPA. La imagen de un objeto observado con una lupa se construye como en el caso de una lente convergente estando el objeto entre la lente y el foco imagen. Si consideramos la lupa una lente gruesa, debemos conocer la posición de los planos principales además de las distancias focales (las cuales tienen el mismo valor).

AUMENTO DE UNA LUPA. Es la relación entre el ángulo bajo el cual se ve la imagen desde el centro óptico del ojo y el ángulo bajo el cual se ve el objeto desde el mismo punto situado a una distancia igual a la mínima de visión neta. Considerando a la lupa una lente convergente delgada y siendo los ángulos pequeños, pueden sustituirse los ángulos por su tangente. Situado el ojo con su centro óptico en O distante a de F', siendo

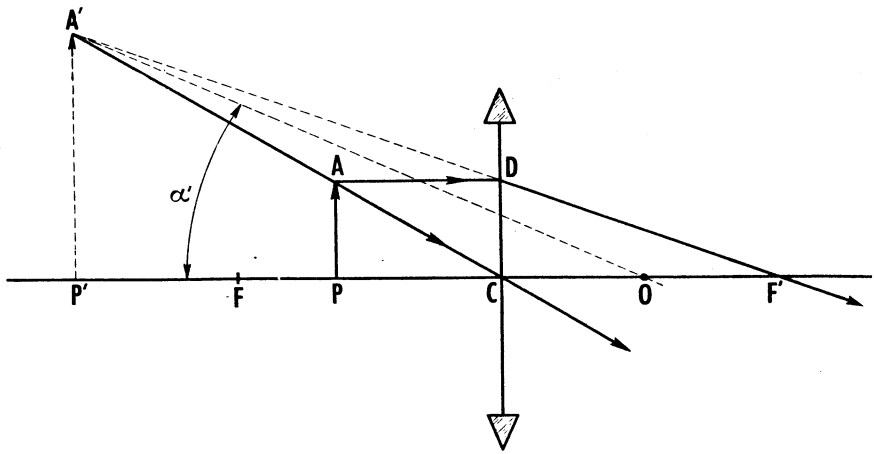


FIG. 95

$\text{tg } \alpha = \dfrac{AP}{d}$, y teniendo en cuenta la figura 95, se verifica:

$$\text{tg } \alpha' = \frac{A'P'}{d'}; \qquad A = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{A'P'}{AP}\,\frac{d}{d'}$$

siendo d' la distancia OP', y d la mínima distancia de visión neta.
De los triángulos $F'A'P'$ y $F'DC$ deducimos

$$\frac{A'P'}{DC} = \frac{P'F'}{CF'}$$

pero $\qquad DC = AP; \quad P'F' = d' + a; \quad CF' = f' = f$

$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{d' + a}{f}; \qquad A = \frac{d' + a}{f}\,\frac{d}{d'} = \frac{d}{f}\left(1 + \frac{a}{d'}\right)$$

Si el objeto se encuentra en el plano focal, la imagen se forma en el infinito y no necesitamos acomodación para observarla; en este caso $d' = \infty$ y el aumento vale $A = \dfrac{d}{f}$ (si $a = 0$ ocurre lo mismo), expresando el

aumento en función de la convergencia de la lente $C = \frac{1}{f}$ y considerando que la distancia mínima de visión neta es 25 cm = 0,25 m, el aumento vale $A = 0{,}25\, C = \frac{1}{4}\, C$, midiendo la C en dioptrias. El aumento vemos que es directamente proporcional a la convergencia de la lente. Suponiendo que el centro óptico del ojo coincide con el de la lente (es decir, muy próximo a él), entonces $a = f$, y si la imagen se forma a una distancia del ojo igual a la mínima de la visión neta, $d' = d$ y el aumento vale

$$A = \frac{d}{f}\left(1 + \frac{f}{d}\right) = \frac{d+f}{f} = 1 + \frac{d}{f}$$

el aumento lateral

$$\beta = \frac{A'P'}{AP} = \frac{d' + a}{f} \quad \text{si } a = f \text{ y } d = d' \quad \beta = \frac{d+f}{f} = 1 + \frac{d}{f}$$

coincide con el angular.

POTENCIA DE UNA LUPA. Es una característica propia, prescindiendo de las características visuales del observador, y es igual a la relación entre el ángulo formado por los extremos de la imagen con el centro óptico del ojo y la altura del objeto (supuesto paralelo a la lupa)

$$p = \frac{\alpha'}{AP} = \frac{\frac{A'P'}{d'}}{AP} = \frac{A'P'}{AP}\,\frac{1}{d'} = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{a}{d'}\right)$$

$$\text{si} \quad a = 0 \quad \text{o si} \quad d' = \infty, \quad p = \frac{1}{f}$$

la potencia de la lupa coincide con su convergencia.

PODER SEPARADOR DE LA LUPA. Es igual a la menor distancia entre dos puntos A y B que el ojo perciba netamente separados al contemplarlos con la lupa. Según lo dicho al hablar de la agudeza visual, sabemos que el ojo normal ve separados dos puntos si el ángulo que forma el centro óptico del ojo con los dos puntos vale como mínimo $3 \cdot 10^{-4}$ radianes. Con la lupa el ángulo con el cual vemos la imagen es α'; por tanto debe ser como mínimo $\alpha' = 3 \cdot 10^{-4}$ radianes; pero $\alpha = \overline{AB} \cdot p$, luego

$$AB = \frac{\alpha'}{p} = \frac{3}{p} \cdot 10^{-4}$$

Observando desde el foco imagen $a = 0$, entonces $p = \frac{1}{f}$ y $AB = 3f \cdot 10^{-4}$, midiendo AB en las mismas unidades que f.

Problema: ¿Cuál es el poder separador de una lupa de 15 dioptrias? (Considerando $a = 0$.)

$$f = \frac{1}{15}\ \text{m} \qquad AB = \frac{3.10^{-4}}{15}\ \text{m} = \frac{1}{5}.10^{-4} = 2.10^{-5}\ \text{m} = 0{,}002\ \text{mm}$$

Microscopio. — El microscopio es un sistema óptico con el cual pueden observarse objetos muy pequeños Dicho sistema óptico consiste esencialmente en un objetivo y un ocular. El objetivo está constituido por un sistema de lentes (para corregir las aberraciones) convergente y de pequeña distancia focal. Dicho objetivo forma una imagen real del objeto de mayor tamaño e invertida. El ocular actúa como una lupa que nos da una imagen virtual mayor que la imagen formada por el objetivo. En el grabado de la página 373 se observan las distintas partes de que se compone un microscopio.

FORMACIÓN DE LA IMAGEN. El objeto se coloca cerca del foco objeto del objetivo y debe formarse entre el foco objeto del ocular y éste, para que el ocular nos dé una imagen virtual y mayor (debe formarse cerca del foco). La imagen que vemos con el microscopio es invertida respecto al objeto observado, ya que el objetivo invierte la imagen y el ocular no. En la figura 96 representamos la marcha de los rayos en el microscopio:

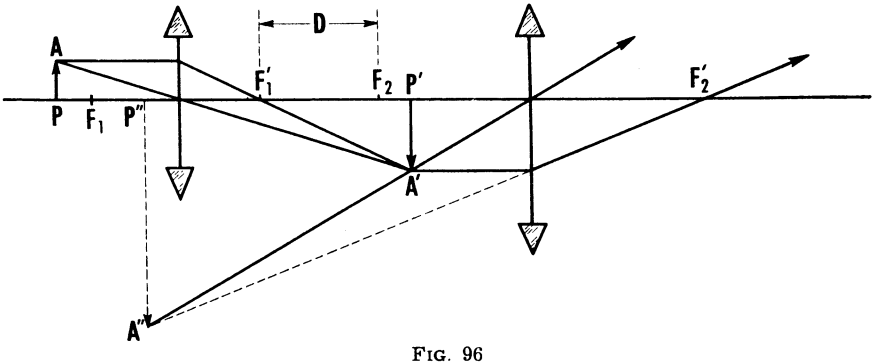


FIG. 96

para facilitar el dibujo se consideran objetivo y ocular lentes delgadas cuando en realidad cada uno de ellos está constituido por un sistema de lentes. En realidad necesitaríamos conocer las distancias focales y la posición de los planos principales, y la construcción sería como la realizada al hablar de la combinación de sistemas ópticos.

Para que un observador vea la imagen de un objeto a través del microscopio debe *enfocar* éste, o sea lograr que la imagen se forme a una distancia del ojo del observador superior a la mínima distancia de la visión neta. Para ello se podría mover el objetivo, para una posición fija

del objeto antes de su foco objeto, hasta ver la imagen con nitidez. En realidad, para enfocar lo que se hace es mover el tubo que contiene objetivo y ocular, manteniendo constante su distancia. Para dicho movimiento, el microscopio tiene dos tornillos de enfoque, uno de movimiento rápido y el otro de movimiento lento, para precisar el enfoque.

PROFUNDIDAD DE CAMPO. Es la distancia entre dos posiciones del objeto observado, tales que sus correspondientes imágenes se formen en el punto próximo y en el remoto del observador. En un microscopio la profundidad de campo es muy pequeña, pues al estar el objeto próximo al foco objeto del objetivo, al desplazar muy poco el objeto el desplazamiento relativo de la imagen real es grande, y al formarse esta imagen cerca del foco objeto del ocular, el desplazamiento relativo al objeto de la imagen final es mayor aún. Siendo la profundidad de campo tan pequeña, el enfoque del microscopio deberá hacerse con cuidado, ayudados por el tornillo de movimiento lento.

AUMENTO DEL MICROSCOPIO. Como en el caso de la lupa, se define el aumento del microscopio a la relación entre el ángulo bajo el cual se ve desde el centro óptico del ojo la imagen dada por el microscopio y el ángulo bajo el cual se ve el objeto desde el mismo punto cuando está situado a la mínima distancia de visión neta. Sustituyendo los ángulos por las tangentes y supuesto el ojo en F_2' tenemos (fig. 96):

$$A = \frac{\dfrac{P''A''}{P''F_2'}}{\dfrac{PA}{d}} \quad \text{pero} \quad \frac{P'A''}{P''F_2'} = \frac{P'A'}{f_2} \qquad A = \frac{P'A'}{PA}\,\frac{d}{f_2}$$

Llamando f_1 y f_2 a las distancias focales del objetivo y del ocular respectivamente, y $D = \overline{F_1' F_2}$, en la figura 96 se verifica (considerando que la imagen dada por el objetivo se forma muy cerca de F_2):

$$\frac{P'A'}{PA} = \frac{D + f_1}{f_1}$$

como f_1 es despreciable frente a D (sus valores son respectivamente, en general, $f = 5$ mm, $D = 160$ mm), queda:

$$A = \frac{D}{f_1}\,\frac{d}{f_2}$$

El aumento lateral es igual a la relación $\dfrac{P''A''}{PA}$

$$\beta = \frac{P''A''}{PA} = \frac{\dfrac{P''A''}{P'A'}}{\dfrac{PA}{P'A'}} = \frac{\beta_2}{\dfrac{1}{\beta_1}} = \beta_1\,\beta_2$$

Siendo β_1 y β_2 los aumentos laterales del objetivo y ocular respectivamente. Así, pues:

El aumento lateral del microscopio es igual al producto del aumento lateral del objetivo por el aumento lateral del ocular. Si la imagen se forma a una distancia del centro óptico del ojo igual a la mínima de la visión neta, entonces el aumento lateral coincide con el aumento angular. Con la aproximación antes citada al ser f_1 pequeño vemos que el aumento angular del objetivo vale $\frac{D}{f_1}$ y el del ocular $\frac{d}{f_2}$, y su producto vale el aumento hallado antes. En un microscopio existe un juego de objetivos y oculares cambiables que nos permiten distintos aumentos.

POTENCIA DEL MICROSCOPIO. Es la relación entre el ángulo que forma el centro óptico del ojo unido con los extremos de la imagen y la altura del objeto. Sustituyendo ángulo por tangente

$$p = \frac{\frac{P''A''}{P''F''}}{PA}, \qquad \text{como} \qquad A = \frac{\frac{P''A''}{P''F''_2}}{\frac{PA}{d}} = \frac{\frac{P''A''}{P''F''}}{PA} \cdot d$$

vemos que

$$p = \frac{A}{d} = \frac{D}{f_1 f_2}.$$

Según vimos al estudiar la combinación de sistemas ópticos, la distancia focal objeto del sistema óptico que constituye el microscopio

$$f = \frac{f_1 f_2}{D}$$

de aquí vemos la potencia del microscopio es

$$p = \frac{1}{f}$$

PODER SEPARADOR DEL MICROSCOPIO. Es la mínima distancia entre dos puntos del objeto, de los cuales el microscopio da dos imágenes separadas. El ocular nos dará dos imágenes separadas si éstas lo están a la salida del objetivo; el poder separador del microscopio es igual al poder separador del objetivo. Dicho poder está limitado por los fenómenos de difracción de la luz utilizada para iluminar el objeto. Teniendo en cuenta los citados fenómenos, se demuestra que la mínima distancia citada vale:

$$s = \frac{1{,}22\,\lambda}{2n \operatorname{sen} U}$$

Generalmente, se toma como poder separador el recíproco de s y escribimos:

$$\text{poder separador} = \frac{2n \operatorname{sen} U}{1{,}22\,\lambda}$$

donde λ es la longitud de onda (supuesta monocromática) utilizada, n es el índice de refracción del medio donde se halla el objeto, U es el ángulo bajo el cual se ve el radio de la pupila de entrada del objetivo desde el centro del objeto.

Para aumentar el poder separador deberemos aumentar n, U y disminuir λ. Para aumentar n se interpone entre el objeto y el objetivo aceite de cedro ($n = 1{,}515$) así tenemos un objetivo llamado de inmersión. Si aumentamos U también aumentaremos las aberraciones del objetivo. Utilizando objetivos convenientemente corregidos puede lograrse que el ángulo U valga 74°. El producto $n \cdot \text{sen } U$ se le llama *apertura numérica* del objetivo. Un objetivo de inmersión utilizando monobromuro de naftalina ($n = 1{,}658$) y para un ángulo $U = 74°$ tiene una apertura numérica $n \cdot \text{sen } U = 1{,}59$. Para aumentar aún más el poder separador puede utilizarse luz ultravioleta de longitud de onda menor que la luz visible, en este caso no es posible observación visual y se utiliza el procedimiento fotográfico. Hay que tener presente que en tal caso las lentes del microscopio son de cuarzo, que absorbe muy poco la citada radiación, en cambio, la absorción del ultravioleta debida al vidrio es mucho mayor.

Anteojo astronómico.— Es un instrumento óptico destinado a la observación de los astros. Consta de un objetivo que forma la imagen del astro en su plano focal y un ocular que sirve para ampliar la imagen dada por el objetivo. El objetivo es un sistema de lentes convergentes de distancia focal relativamente grande (algunos metros); el ocular, también convergente, tiene una distancia focal pequeña (algunos centímetros). Generalmente, en cada anteojo hay un juego de oculares de distintos aumentos que se utilizan en cada caso concreto según las necesidades. El objetivo da una imagen real e invertida y el ocular da una imagen virtual que también será invertida respecto al objeto.

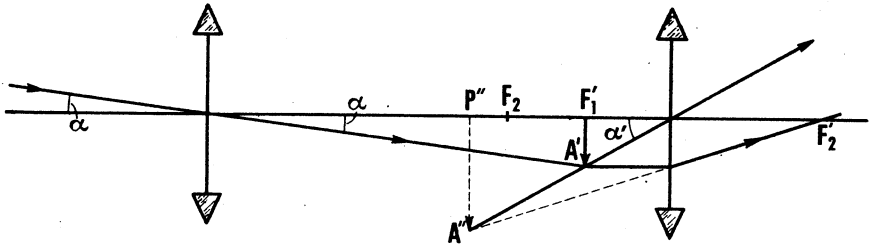


FIG 97

FORMACIÓN DE LA IMAGEN. En la figura 97 representamos la formación de la imagen. La imagen del objetivo se forma en su plano focal y está situada muy cerca del foco objeto del ocular y entre dicho foco y el ocular. La imagen es virtual y mayor. Si el foco imagen del objetivo coincide con

el foco objeto del ocular, la imagen se forma en el infinito y no hay necesidad de acomodación. Cuando los focos citados coinciden, el sistema se llama afocal (los focos del sistema están en el infinito).

Para enfocar el anteojo moveremos el ocular respecto al objetivo hasta lograr que la imagen se forme a distancia superior a la mínima de la visión neta. Si no queremos acomodar la formaremos a distancia superior a la del punto remoto (o en el infinito).

AUMENTO DEL ANTEOJO ASTRONÓMICO. En este caso el aumento no puede definirse como en los casos anteriores, ya que el objeto está muy lejos. El aumento que podemos considerar útil al observador se define como la relación entre el diámetro aparente de la imagen (ángulo bajo el cual el ojo ve su diámetro) y el diámetro aparente del objeto observado. De la figura 97 se desprende que el diámetro aparente de la imagen es α' y el del objeto es α. Siendo los ángulos pequeños, sustituiremos ángulo por tangente y tenemos:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\dfrac{F'_1 A'}{f_2}}{\dfrac{F' A'}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}$$

(supuesto que F_2 y F'_1 coinciden o están muy próximos).

El aumento nominal de un anteojo astronómico es igual a la relación de la distancia focal del objetivo a la del ocular. Para lograr grandes aumentos deberemos aumentar la distancia focal del objetivo y disminuir la del ocular.

CAMPO DEL ANTEOJO ASTRONÓMICO. Es la porción de espacio visible con dicho instrumento en las condiciones consideradas al usarlo. Se mide por el ángulo de un cono, de vértice el centro óptico del objetivo, tal que podamos observar cualquier objeto situado en su interior.

PODER SEPARADOR. Se mide por la mínima distancia angular que forma dos puntos (por ejemplo dos estrellas) para que se vean separados al contemplarlos con el anteojo. Dicho poder viene limitado por los fenómenos de difracción de la luz. Como en el caso del microscopio, el poder separador del anteojo es el del objetivo. Se demuestra que su valor es:

$$\text{mínimo ángulo} = \frac{1{,}22\,\lambda}{2R} \text{ radianes.}$$

Siendo λ la longitud de onda y R el radio del borde del objetivo. Puede expresarse este mínimo ángulo en segundos, tomando $\lambda = 500$ mμ (milimicras) queda: $\textit{mínimo ángulo} = \left(\dfrac{60}{R}\right)''$ (R expresado en milímetros).

Para que el ángulo sea el menor posible, el valor de R debe ser lo mayor posible (compatible con la posibilidad de corrección de las aberra-

ciones del objetivo). Con el anteojo astronómico del Observatorio Fabra de Barcelona, para el cual $2R = 38$ cm, pueden verse separadas dos estrellas cuya distancia angular sea

$$\left(\frac{60}{190}\right)'' = (0{,}315)''.$$

Anteojo terrestre. — Es un instrumento óptico que nos permite ver un objeto lejano con mayor diámetro aparente que a simple vista, debiendo tener la imagen la misma posición relativa al suelo que el objeto (no puede dar imagen invertida). Para lograr la inversión de imagen en un anteojo astronómico para convertirlo en terrestre, podemos añadir una lente convergente colocada en forma conveniente (en algunos casos dos), nos dará una imagen invertida de la que nos ha formado el objetivo, por lo tanto tendremos una imagen derecha. El utilizar dos lentes tiene la ventaja de enderezar la imagen y ampliarla. Un inconveniente de estos anteojos es su excesiva longitud, lo cual dificulta el transporte para las observaciones terrestres en distintos lugares. Como ejemplo de anteojo terrestre tenemos el catalejo. Para evitar este inconveniente se utiliza el anteojo de Galileo, que en esencia consiste de un objetivo convergente y un ocular divergente. En la figura 98 representamos la marcha de la

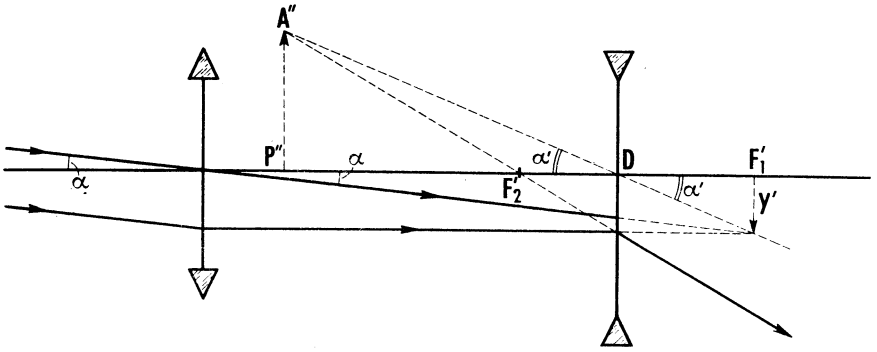


FIG. 98

luz en este anteojo. Siendo el objeto lejano el objetivo nos daría una imagen real situada en su plano focal. Antes de su foco imagen está el ocular divergente, para el cual aquella imagen actúa como objeto virtual y de la cual nos dará la imagen $A''\,B''$ virtual derecha y mayor.

El aumento será $\frac{\alpha'}{\alpha}$. Operando como en los casos anteriores, sustituimos

ángulos por tangentes, tenemos (suponiendo $DF'_1 = f_2$) entonces la imagen se forma en el infinito y observando desde D:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{y'}{f_2} \\ \alpha &= \frac{y}{f_1} \end{aligned}\right\} \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2}$$

Cuando la imagen se forma en el infinito, es decir, cuando coinciden el plano focal imagen del objetivo y el plano focal objeto del ocular, la distancia entre objetivo y ocular (prácticamente la longitud del anteojo es igual a la diferencia entre la distancia focal del objetivo y la del ocular). Para enfocar este anteojo se mueve el ocular respecto el objetivo.

Para observar un objeto con el anteojo de Galileo debe colocarse la pupila del ojo lo más cerca posible del ocular, ya que el haz luminoso emergente del ocular es divergente y así tendremos más claridad en la imagen.

El poder separador de dicho anteojo vendrá limitado por la agudeza visual del observador y será igual al mínimo ángulo que forman dos puntos del extremo del objeto para que se vean separados observados a través del anteojo. En este caso este mínimo ángulo viene limitado por la agudeza visual del observador. Su valor es

$$\text{mínimo ángulo (expresado en minutos)} = \left(\frac{1}{\text{aumento}}\right)$$

Los conocidos gemelos de teatro son un par de anteojos de Galileo. El aumento en dichos gemelos es pequeño.

Para el enderezamiento de la imagen puede utilizarse dos prismas de reflexión total y así se construyen los prismáticos constituidos por dos anteojos, cuyos objetivos están constituidos por asociación de lentes que nos den un sistema convergente y un ocular corriente. La visión binocular nos permite apreciar el relieve del objeto. El aumento corriente en los prismáticos está comprendido entre 5 y 15.

Cámara fotográfica. — Es un aparato cuya parte óptica consiste en un objetivo convergente que nos forma la imagen de un objeto sobre una placa o película sensible. Se logra formar la imagen en la placa (enfocar) variando la distancia del objetivo a la placa.

Debido a que la abertura del haz incidente es mayor que en los anteojos astronómicos y que la imagen sobre la placa debe ser nítida, el objetivo debe estar muy bien corregido de aberraciones. La entrada de luz se regula con un diafragma de anchura variable (iris) que nos permite variar la abertura del haz incidente. La abertura del diafragma depende de la iluminación del objeto que se pretende fotografiar y del tiempo de exposición. Un objetivo es tanto más claro o *luminoso* cuando exige menor

tiempo de exposición a igualdad de iluminación del objeto. Por otra parte el tiempo de exposición depende de la sensibilidad de la película. Hay que calcular el tiempo de exposición en función de la sensibilidad de la película, iluminación del objeto y abertura del diafragma. Si el objeto es inmóvil puede tenerse el diafragma a pequeña abertura y prolongar el tiempo de exposición, tanto más cuanto menor sea la iluminación.

Aumento. Es la relación entre el tamaño de la imagen y la del objeto. Dicho aumento es igual a la relación entre la distancia focal del objetivo y la distancia del objeto a fotografiar.

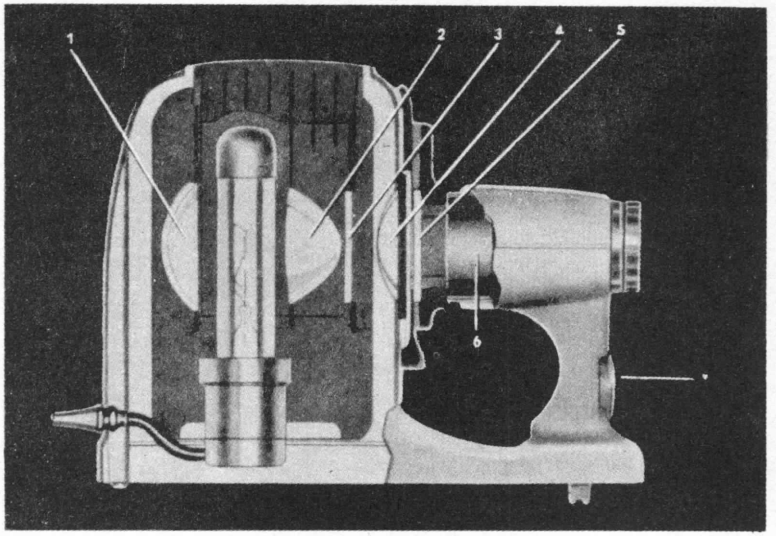
Poder separador. Es la menor distancia entre dos puntos que puedan distinguirse en la prueba fotográfica. Depende de las aberraciones de esfericidad, las aberraciones cromáticas y al diámetro de las pupilas (que puede originar fenómenos de difracción). Aparte del sistema óptico, el poder separador depende del grano de la placa (variable con la sensibilidad).

Campo angular. Se llama *campo total* a la porción de espacio en el interior del cono formado por los rayos que atraviesan el objetivo. Se llama *campo de nitidez* a la porción de espacio que está comprendido dentro del cono formado por los rayos que pasan por el objetivo y dan una imagen aceptable de los objetos situados en aquel espacio. Si el ángulo de abertura del cono que define el campo de nitidez es inferior a 50°, el objetivo correspondiente se dice *pequeño angular* y si es superior a 75° se llama *gran angular*.

Profundidad de campo. Supongamos que enfocamos un plano vertical. Los objetos situados en dos planos paralelos a éste, uno antes y otro después, nos dan en la placa imágenes nítidas. Llamaremos profundidad de campo a la mayor distancia entre aquellos dos planos con tal de que las imágenes en la placa sean nítidas. Esta profundidad aumenta al aumentar la distancia del objeto al objetivo y al disminuir la abertura del diafragma.

Profundidad de foco. Si queremos fotografiar un objeto contenido en un plano deberemos colocar la placa en el plano conjugado respecto del plano objeto. Colocando la placa antes y después de dicho plano conjugado obtenemos imágenes nítidas. A la mayor distancia entre los planos donde podemos colocar la placa para obtener imagen nítida de un mismo plano objeto, se llama *profundidad de foco*.

Abertura relativa del objetivo. Se llama abertura relativa del objetivo al cociente entre el diámetro del diafragma y la distancia focal del objetivo. El tiempo de exposición depende de la iluminación de la imagen sobre la película y es inversamente proporcional al cuadrado de la abertura relativa del objetivo. Se conviene en tomar los tiempos de exposición proporcionales a 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) o sea a 1, 2, 4, ... Las aberturas relativas, y por tanto los diámetros del diafragma, serán inversamente proporcio-



Aparato de proyección: 1, espejo cóncavo; 2, lente del condensador; 3, filtro calorífico; 4, lente del campo de imagen; 5, ajuste de diapositivas; 6, soporte de diapositivas; 7, tornillo regulador de inclinación.

nales a la raíz cuadrada de estos números, o sea a 1 - 1,4 - 2 - 2,8... En el diafragma del objetivo se suele indicar el correspondiente valor, que serán los valores anteriores multiplicados por una constante.

Aparato de proyección. — Sirve para obtener sobre una pantalla una imagen real y mayor de un determinado objeto. Consta de un objetivo convergente delante del cual colocamos el objeto (transparente) a una distancia del objetivo comprendida entre la distancia focal y el doble de la misma, de esta forma la imagen es real y mayor. El objeto se ilumina de manera adecuada y se coloca invertido para que la imagen sea derecha.

El aumento del aparato de proyección es igual a la relación entre el tamaño de la imagen y el del objeto y es igual a la relación entre la distancia de la pantalla al objetivo y la del objeto al mismo. Aproximadamente es igual a la distancia de la pantalla al objetivo dividida por su distancia focal.

Para que la imagen sea clara es preciso una buena iluminación del objeto (placa o película). Se logra con un sistema de lentes (condensador) que nos concentre sobre el objeto a proyectar el haz de rayos procedente del foco luminoso. En algunos casos se coloca detrás del foco luminoso un espejo cóncavo para aprovechar todos los rayos que salen de él.

Si hay que proyectar un objeto opaco se coloca horizontalmente y se ilumina fuertemente. por medio de un espejo mandamos los rayos luminosos al objetivo y de aquí van a la pantalla como antes.

PRÁCTICAS

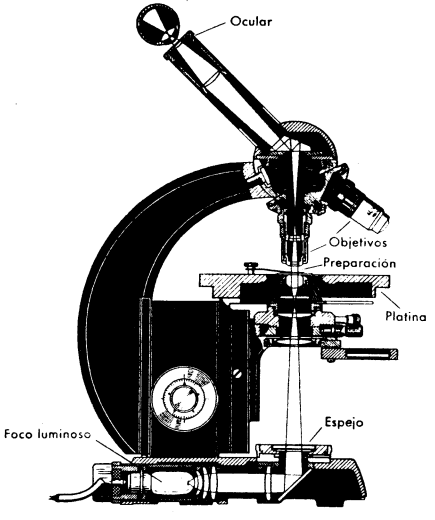
Aumento lateral de una lupa. — Tomamos dos tubos cortos, de diámetro el de la lupa, que se fijan a un soporte y se colocan verticalmente, separados la misma distancia que los ojos del observador. En uno de ellos se coloca la lupa (en la parte superior). Se sitúa una regla dividida en milímetros a una distancia del ojo del observador igual a la mínima de la visión neta del observador (puede tomarse, en general, 25 cm). Otra regla que puede desplazarse verticalmente se observa con un ojo a través de la lupa, mientras que con el otro ojo se observa la regla fija. Se desplaza la regla móvil hasta que la imagen se forma a la mínima distancia de la visión neta, o sea, en el mismo plano donde está situada la regla fija. En este caso las dos imágenes se superponen y podremos comparar la relación entre las divisiones imagen y objeto, y de aquí calcular el aumento.

Puede hacerse por cálculo, conociendo la distancia focal f y aplicando la fórmula que damos a continuación:

$$A = 1 + \frac{d}{f}.$$

Aumento lateral de un microscopio, utilizando la cámara clara. — La *cámara clara* consiste en un prisma de reflexión total y un espejo plano de forma que adaptando al ocular un anillo que contiene el prisma, veremos al mismo tiempo la imagen dada por el microscopio y la reflejada por el espejo y el prisma (fig. 99).

Para determinar el aumento del microscopio se toma como objeto a observar una escala de uno o dos milímetros grabada en vidrio subdividida de forma que la separación entre dos trazos sea de una décima o centésima de milímetro (micrómetro). Una vez tengamos superpuestas la imagen del micró- el espejo de la cámara hasta que veamos superpuestas la imagen del micrómetro y la imagen de un papel milimetrado dado por el espejo. Se mueve el papel milimetrado hasta que coincidan la imagen de una de las divisiones del



MICROSCOPIO

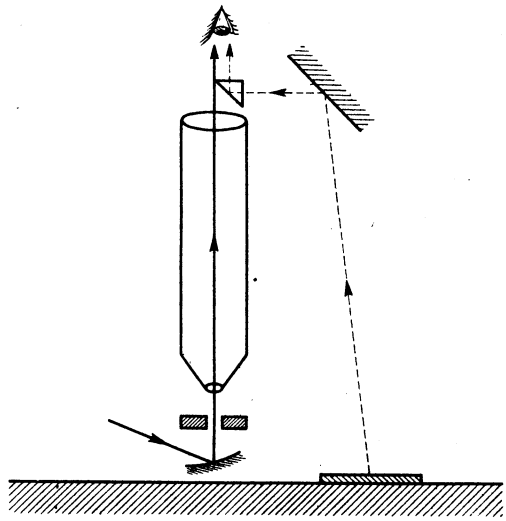


FIG. 99

micrómetro con la de una de las divisiones del papel milimetrado, de modo que la imagen del micrómetro tenga la misma dirección que las divisiones horizontales o verticales del papel. Se cuenta el número de milímetros correspondientes a una o dos divisiones del micrómetro. Para calcular el aumento dividiremos el número de milímetros correspondientes a una división del micrómetro por el valor de dicha división. (Se supone que el papel milimetrado se ha colocado a una distancia igual a la mínima de la visión neta del observador.) Supongamos que en el micrómetro están grabadas las divisiones a una distancia de 0,1 mm, y que dos divisiones se vean superpuestas a 12 mm de la imagen del papel. El aumento lateral será:

$$A = \frac{12}{0{,}2} = 60.$$

CUESTIONES

1. *¿Qué ocurriría si la luz se propagara con la misma velocidad en todos los medios?*
2. *¿Cómo aumentaríamos el camino óptico de un rayo luminoso?*
3. *¿Cuándo coincide el camino óptico con la distancia entre dos puntos?*

4. *Observamos un objeto reflejado en un medio limitado por una superficie plana. ¿Cuándo será más clara su imagen?*

5. *Un rayo luminoso incide en un medio formando cierto ángulo con la normal. ¿Qué le ocurriría al rayo refractado si el índice de refracción de dicho medio aumentase de manera continua con la profundidad?*

6. *Si no existiera la atmósfera terrestre, ¿se vería salir el Sol antes o después de la hora en la cual se ve salir normalmente?*

7. *¿Por qué nos parecen más cerca de la superficie los objetos en el fondo de una vasija con agua?*

8. *¿Aumentaría la profundidad aparente de un objeto en el fondo de una vasija con agua, al sustituir el agua por benceno? (Véase tabla de índices de refracción.)*

9. *Explíquese el fenómeno del espejismo.*

10. *Cítense ejemplos de dioptrios planos.*

11. *Encima de un espejo plano colocamos una lámina gruesa de vidrio. Dibujar la marcha de un rayo luminoso que incide oblicuamente sobre la citada lámina.*

12. *A un prisma le adaptamos una lámina de vidrio de caras paralelas y del mismo índice de refracción. ¿Aumentamos la desviación del prisma?*

13. *Sumergimos una cara de un prisma de vidrio en agua. ¿Varía su desviación?*

14. *A un prisma le adaptamos un espejo plano en una cara. Dibujar la marcha de un rayo luminoso que incide perpendicularmente a la otra cara.*

15. *La misma cuestión anterior suponiendo que la luz incide oblicuamente a la primera cara.*

16. *A un prisma le adaptamos un espejo plano en una cara y otro en la base. Dibujar la marcha de un rayo luminoso que incide normalmente a la otra cara.*

17. *Una bola de latón, ¿constituye un dioptrio?*

18. *Una bola de vidrio, ¿constituye un dioptrio?*

19. *Un matraz lleno de agua, ¿constituye un dioptrio o un sistema óptico?*

20. *¿Cómo determinaríamos si un sistema óptico es convergente o divergente?*

21. *¿Cómo podemos determinar de manera sencilla la distancia focal de una lente delgada convergente?*

22. *¿Cuál es la mínima distancia de una lente convergente delgada a la cual debemos colocar un objeto para que nos forme una imagen real?*

23. *Si colocamos un objeto en el foco de una lente convergente, ¿veremos su imagen? ¿Podemos formarla sobre una pantalla?*

24. *¿En qué posición colocaremos un objeto para que una lente delgada convergente nos forme una imagen real mayor que el objeto?*

25. *Cuando una lente convergente nos forma imagen virtual, ¿dónde está situado el objeto?*

26. *La imagen citada en la cuestión anterior, ¿será mayor que el objeto?*

27. *Una lente divergente, ¿puede formar una imagen real?*

28. ¿Una imagen divergente puede formar la imagen mayor que el objeto?

29. Disponemos de dos lentes convergentes y dos divergentes de la misma distancia focal. Determinar la distancia focal del sistema compuesto asociando dos a dos estas lentes.

30. ¿Qué tipo de imágenes forman los espejos esféricos convexos?

31. Si aumentásemos idealmente el radio de un espejo esférico convexo hasta convertirlo en plano, ¿qué le ocurriría a la imagen de un objeto fijo a distancia constante del espejo?

32. ¿Cuál sería la imagen de un objeto situado en el centro de curvatura de un espejo esférico cóncavo?

33. Un observador contempla su imagen en un espejo plano, y luego en un espejo esférico convexo situados a la misma distancia. ¿En cuál de los dos la imagen será más luminosa?

34. ¿Qué tipo de aberración producen los rayos marginales en una lente?

35. Con dos tiras de hojalata de distinta longitud formamos dos espejos esféricos cóncavos de la misma curvatura (basta apoyarlos fuertemente sobre una misma barra). ¿En cuál de los dos observaremos mejor la cáustica?

36. Observando las gafas que usa, ¿cómo podemos saber si una persona es miope o hipermétrope?

37. ¿Cómo debe utilizar una lupa una persona de presbicia muy acusada?

38. ¿Podría utilizarse una lente divergente para obtener una lupa?

39. ¿Cuál es una de las aberraciones más importantes que deben corregirse en el objetivo de un microscopio?

40. En un aparato fotográfico, ¿cuáles son los colores que deben corregirse principalmente para evitar la aberración cromática?

41. ¿Cómo debemos fotografiar un objeto en rápido movimiento?

PROBLEMAS

1. Determinar la velocidad de la luz en el agua ($n = 1{,}33$).

2. El índice de refracción de un vidrio es 1,5. ¿Cuál es el índice de refracción de dicho vidrio respecto al agua?

3. Un punto luminoso se encuentra entre dos espejos planos que forman 90° Dibujar las imágenes producidas.

4. La velocidad de la luz en un medio es de 200 000 km/s y en otro medio es de 250 000 km/s. ¿Cuál es el índice de refracción absoluto de cada medio y el relativo del primero al segundo?

5. Un rayo luminoso procedente del aire penetra en un medio con un ángulo de incidencia de 30° y el ángulo que forma con la normal dentro del medio es de 22° 30'. ¿Cuál es el índice de refracción del medio relativo al aire y la velocidad de la luz en él?

6. Determinar el ángulo límite para un rayo que pasa del vidrio al aire (índice de refracción del vidrio considerado, respecto al aire $n = 1{,}5$.)

7. ¿Cuál debe ser la velocidad de la luz en un medio para que el ángulo límite al emerger al aire sea de 45°?

8. Determinar el ángulo límite para los rayos emergentes de un vidrio al agua (índice de refracción de tal vidrio $n = 1{,}5$).

9. Una piscina de 3 m de profundidad está llena hasta la mitad. Observando desde la parte superior, ¿a qué profundidad veremos el fondo?

10. Un nadador sumergido en la piscina del problema anterior a 1 m de profundidad, ¿a qué distancia vería al anterior observador?

11. Una lámina gruesa de vidrio, de índice de refracción $n = 1{,}5$ de caras paralelas, tiene una cara en contacto con agua y la otra en el aire. Determinar el ángulo mínimo de incidencia de un rayo procedente del agua para que no emerja al aire.

12. Un objeto luminoso dista 1 m de una lámina de vidrio de caras paralelas de 30 cm de espesor e índice de refracción $n = 1{,}5$. Determinar la distancia a la lámina de la imagen producida.

13. Tenemos un prisma de vidrio de ángulo 30° y de índice $n = 1{,}5$. Un rayo luminoso incide normalmente a una cara. Determinar el ángulo de emergencia y la desviación.

14. Determinar el ángulo de un prisma de índice $n = 1{,}414$ tal que un rayo incidente rasante emerge rasante. Hallar también la desviación.

15. El ángulo de un prisma es de 60° y la mínima desviación 30°. Determinar el ángulo de incidencia y el índice de refracción.

16. A una cara de un prisma le adaptamos un espejo plano. Siendo el índice de refracción del prisma $n = 1{,}414$, hallar el menor valor del ángulo del prisma para que un rayo que incida normalmente a la otra cara no regrese al primer medio.

17. Una larga barra de vidrio tiene una superficie extrema de forma esférica convexa, de centro en el eje de la barra y de radio 4 cm (índice de refracción $n = 1{,}53$). Un punto luminoso cercano al eje dista 14 cm del centro de curvatura de la citada superficie esférica. Determinar la posición de la imagen.

18. El mismo problema anterior, considerando la superficie cóncava.

19. Sumergimos la barra de vidrio del problema anterior en agua. Determinar la imagen del mismo punto, considerando los dos casos de superficie convexa y cóncava.

20. Los radios de curvatura de una lente biconvexa, supuesta delgada, miden 20 y 25 cm. Determinar la distancia focal sabiendo que el índice de refracción del vidrio de la lente es $n = 1{,}6$.

21. Asociamos la lente del problema anterior con una planocóncava de 25 cm de radio y del mismo índice de refracción que la anterior. Hallar la potencia del sistema de lentes así formado.

22. Un objeto de 20 cm de altura se coloca en el eje de una lente convergente y paralelo a la lente. Sabiendo que la potencia de la lente es de 2 dioptrias y que el objeto dista 1 m de la lente, determinar la posición y tamaño de la imagen.

23. ¿A qué distancia de la lente del problema anterior debemos colocar el objeto para que la altura de la imagen formada sobre una pantalla sea de 1 m?

24. El mismo problema anterior, para que la imagen sea virtual y también de 1 m de altura.

25. Sustituimos la lente del problema 22 por otra divergente de —2 dioptrias. Hallar la posición y tamaño de la imagen.

26. Un objeto situado a 2 m de una lente convergente forma su imagen real a 40 cm de la lente. Hallar la distancia focal y la potencia de la lente.

27. Queremos que la imagen, citada en el problema anterior, se forme a 1 m de la lente. ¿Cuál es la potencia de la lente que debemos asociar con la anterior?

28. Un punto luminoso se acerca a una lente convergente con velocidad constante de 1 m/s. Cuando dista 10 m de la lente, su imagen real dista $\frac{10}{9}$ m. ¿Al cabo de cuánto tiempo su imagen no la podremos ver formada sobre una pantalla?

29. Una lente biconvexa gruesa de 6 cm de espesor, tiene los planos principales situados dentro de la lente a 2 cm de los centros de las caras (H respecto la de la izquierda y H' respecto la de la derecha). La distancia focal es de 50 cm. Un objeto está situado a 58 cm de una cara de la lente. ¿A qué distancia de la otra cara estará la imagen formada? Siendo la altura del objeto de 20 cm, hallar la de la imagen.

30. Un pequeño objeto que está sobre el eje y a la izquierda del foco objeto de una lente gruesa dista 2 cm de él. Su imagen dista 8 cm del foco imagen. ¿Cuál es su distancia focal?

31. Los planos principales de un sistema óptico distan entre sí 1 cm. Sus distancias focales valen 4 cm. Un objeto perpendicular al eje está situado a 6 cm del foco objeto (y a su izquierda), mide 2 cm de altura. Determinar gráfica y analíticamente la posición y altura de la imagen.

32. Un objeto de 2,4 cm de altura, perpendicular al eje, está a la izquierda del foco objeto de una lente gruesa y dista de él 4 cm. La imagen dista del foco imagen 9 cm. La distancia entre los focos es de 14 cm. Determinar la posición de los planos principales y la altura de la imagen.

33. Un objeto situado perpendicularmente al eje de un espejo convexo, dista 2,5 cm del mismo. Sabiendo que el radio del espejo es de 20 cm y que la altura del objeto es de 4 cm, determinar la posición de la imagen y su altura.

34. Determinar la posición de un objeto respecto a un espejo convexo, en función del radio de curvatura, para que la imagen tenga una altura igual a la mitad de la del objeto.

35. ¿Cuáles deben ser las dimensiones mínimas de un espejo convexo de 50 m de radio de curvatura, para que un observador situado a 1 m del espejo vea completamente un objeto cuadrado paralelo al espejo situado a 20 m y que tiene 2 m de lado?

36. Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 4 m. Colocamos un objeto de 1 cm de altura perpendicular al eje del espejo y situado a una distancia del espejo igual al radio. Determinar la posición y tamaño de la imagen.

37. Desplazamos el objeto del problema anterior 1 m hacia el espejo. ¿Cuánto se desplaza la imagen? ¿Cuál es su nueva altura?

38. Un observador contempla su propia imagen en un espejo plano. ¿Cuál es la mínima altura del espejo para que el observador se vea completamente si su estatura es de 1,70 m? Suponiendo que la distancia del extremo superior de su cuerpo a los ojos es de 8 cm, determinar a qué altura deberemos colocar la parte inferior del espejo.

39. La escala de un galvanómetro de espejo dista 1 m del espejo, que es plano. Si la escala está dividida en milímetros, hallar el número de divisiones correspondientes a un giro del espejo de 1°.

40. Sustituimos el espejo plano del problema anterior por otro cóncavo de 1,5 metros de radio. ¿A qué distancia deberemos colocar la escala para que la imagen luminosa sea nítida? (El foco luminoso está junto a la escala y es su parte inferior.) ¿Habremos aumentado la sensibilidad?

41. ¿Qué forma debería tener la escala del problema anterior para que la imagen luminosa sobre la escala fuese siempre perfectamente nítida?

42. Un miope no ve con nitidez los objetos situados a una distancia superior a 2 m de sus ojos. ¿Cuál es la potencia de las lentes necesarias para observar objetos alejados?

43. Un miope tiene su punto remoto a una distancia de 30 cm de sus ojos. ¿Cuál debe ser la potencia de las lentes necesarias para que vea objetos lejanos sin acomodar? Suponiendo que su punto próximo está a 12 cm de sus ojos determinar la mínima distancia de la visión neta cuando usa las lentes citadas en la pregunta anterior.

44. Una persona présbita tiene el punto próximo a una distancia de los ojos igual a 1 m. Su punto remoto dista 2,5 m. Determinar las lentes necesarias para poder leer a 25 cm de distancia y cuales deberá usar para ver objetos lejanos.

45. La agudeza visual de una persona es de $3{,}10^{-4}$ radianes. A una distancia de 2 km, ¿cuál será la máxima separación de dos postes verticales, observando normalmente al plano determinado por los mismos, para verlos como separados.

46. Observamos por medio de una lupa un objeto de 2 mm de altura. La distancia focal de la lupa es de 10 cm y la mínima distancia de la visión neta vale $d = 25$ cm. Hallar el tamaño de la imagen. (Observamos con el ojo pegado a la lupa.)

47. Determinar la potencia de una lupa para poder apreciar trazos separados 0,003 mm.

48. En un microscopio la distancia objetivo-ocular es de 24 cm. Las distancias focales del objetivo y del ocular son respectivamente de 6 mm y de 8 cm. Hallar el aumento.

49. Un microscopio utiliza objetivo de inmersión con aceite de cedro ($n = 1{,}515$). Suponiendo la longitud de onda de la luz utilizada de 500 milimicras y el ángulo $U = 60°$, determinar la mínima distancia entre dos puntos para que puedan verse separados.

50. Un anteojo astronómico tiene un objetivo de distancia focal 1 m y un ocular de distancia focal 5 cm. Si el diámetro aparente del Sol es aproximadamente de 37', ¿cuál será el diámetro aparente de la imagen?

51. Un anteojo terrestre tiene una longitud de 90 cm. La distancia focal del ocular es de 10 cm. Calcular el aumento.

52. En una máquina fotográfica la distancia de la película al objetivo es de 10 cm. Queremos fotografiar un objeto de 18 cm de altura que dista 90 cm del objetivo. ¿Cuál debe ser la distancia focal del objetivo y qué altura tendrá el objeto fotografiado?

APÉNDICE

EJERCICIOS DE FÍSICA

En este apéndice encontrará el lector, los problemas, unos con el resultado y otros resueltos, propuestos en los anteriores exámenes del Curso Preuniversitario.

Problemas con el resultado

1 A lo largo de un plano inclinado de longitud 1 m y que forma un ángulo de 30° con la horizontal cae rodando (sin deslizamiento) una esfera homogénea de radio r y de masa 500 gramos. Inició la caída partiendo del reposo. ¿Cuánto vale su velocidad final, prescindiendo del rozamiento? ¿Y su energía cinética?

Dato: Momento de inercia de la esfera: $I = \frac{2}{5} mr^2$.

Velocidad final = 2,65 m/s.
Energía cinética = 2,45 julios.

2 Una rueda de 50 kilos de masa gira con una velocidad de 3000 r. p. m. supuesta concentrada a una distancia de 50 centímetros del eje de giro. Sobre la periferia se aplica una fuerza constante que la hace parar en un minuto.

1.º Calcular el valor y signo de la aceleración angular.
2.º Número de vueltas que da la rueda en el minuto considerado.
3.º Valor de la fuerza aplicada.
4.º Pérdida de energía cinética de rotación que experimenta la rueda al pararse.
5.º Si el 40 % de esta energía, transformada en calor, se emplea en fundir hielo a 0°, ¿qué peso de hielo se fundirá? Calor de fusión del hielo 80 cal/gramo.

1.º $\alpha = -\frac{5\pi}{3}$ rad/s²
2.º Núm. de vueltas = 1500
3.º $F = 131.25$ newton
4.º $\Delta E_c = 6.25 \cdot 10^5$ julios
5.º $m = 750$ gramos

3 Por una pista horizontal, cubierta de nieve, se desliza un trineo; suponiendo que el peso del trineo es de 105 kilogramos, que va a una velocidad inicial de 36 km/hora y que el coeficiente de rozamiento vale 0,025. Calcular:

1.º El tiempo que tarda en parar (tomar $g = 10$ m/s²).
2.º La distancia que habrá recorrido hasta el momento de pararse.
3.º La energía cinética del trineo en el momento inicial (en julios).
4.º La nieve que se licuará al paso del trineo (calor de fusión de la nieve = = 79,6 cal/gramo).

1.º Tiempo = 40 segundos.
2.º Distancia recorrida = 200 metros.
3.º Energía cinética inicial = 5250 julios.
4.º Cantidad de nieve licuada a su paso = 15,83 gramos

4 Dos esferas elásticas de la misma masa se encuentran en una vertical separadas por 80 m de distancia. La superior se deja caer sin velocidad inicial y la otra se lanza simultáneamente hacia arriba, de modo que choquen en el preciso momento en que esta última invierte su sentido del movimiento. Determinar la velocidad inicial que se ha comunicado a la segunda y las posiciones que ocuparán un segundo después del choque, referidas a la posición inicial de la segunda esfera.

Velocidad inicial de la segunda esfera: 28 m/s
La primera dista: 35,1 m
La segunda dista: 7,1 m

5 A un muelle helicoidal se le cuelga un cuerpo de 10 kg y se alarga 2 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3 cm. Se desea saber:

1.º La frecuencia del movimiento.

2.º La velocidad, aceleración y la fuerza recuperadora a los 2 segundos de haber empezado a oscilar.

1.º La frecuencia del movimiento = 2,5 s^{-1}
2.º Velocidad = 46,95 cm/s; aceleración = 0; fuerza = 0.

6 Desde un punto situado a una altura de 10 metros sobre la superficie de un estanque lleno de agua y de profundidad de 5 metros, se deja caer una esferita de 0,2 centímetros de radio y de densidad 7,5 g/cm^3.

1.º Cuánto tarda en llegar al fondo del estanque.

2.º Energía cinética con que llega al fondo.

b) La esfera es de madera de densidad 0,7.

1.º La profundidad hasta la que llega a hundirse en el estanque.

2.º La velocidad con que llega a la superficie.

1.º $t=2$ s
2.º $E_c=45{,}125\cdot10^{-3}$ julios
b)
1.º $h=\frac{70}{3}$ m
2.º $v=14$ m/s

7 En un tubo cilíndrico de 4 mm de radio, en el que el mercurio marcaba 740 mm de altura quedando 15 cm de cámara barométrica, ha entrado aire, y como consecuencia ha bajado la columna a 715 mm. Calcular: 1.º El volumen de aire que ha entrado a la presión atmosférica.

Si se pone ahora la cámara en comunicación con un globo vacío de litro y medio de volumen. Calcular:

2.º La nueva presión del aire.

3.º La altura marcada por el mercurio.

1.º $V_0 = 0{,}288$ cm^3
2.º $p = 0{,}14$ mm de Hg
3.º $h = 739{,}86$ mm

8 Una botella de acero de 10 litros de capacidad tiene una llave que permite ponerla en comunicación con la atmósfera. La presión exterior es de 76 cm de mercurio y se supone que la botella no se dilata. Averiguar:

1.º ¿Cuánto pesa el aire contenido en la botella, si su temperatura es de 0°C y su presión de 114 cm de mercurio, estando cerrada la llave.

2.º Sin abrir la llave se calienta la botella hasta 100°C. ¿Cuál será entonces la presión del aire interior?

3.º Se mantiene la temperatura de 100°C y se abre la llave. ¿Cuánto pesará el aire que quede dentro de la botella?

4.º Finalmente, se cierra la llave y se enfría todo a 0°C. ¿Cuál será entonces la presión del aire interior?

Peso específico del aire en condiciones normales, 1,293 g/litro.

1.º $m=19{,}4$ gramos
2.º $p=155{,}72$ cm de Hg
3.º $m=9{,}46$ gramos
4.º $p'=55{,}6$ cm de Hg

9 Un condensador de 100 microfaradios está cargado al potencial de 2500 voltios

1.º Calcular la carga del condensador y su energía.

2.º Determinar el peso de hielo a 0° que se podría fundir con el calor que desprendiese la descarga del condensador, suponiendo que en esta descarga toda la energía se transformase en calor.

3.º Determinar el volumen que tomaría 1 g de oxígeno, primitivamente en condiciones normales, si manteniendo la presión constante, se le hiciese absorber el calor producido en la descarga precedente.

Datos:
Calor latente de fusión del hielo 80 calorías.
Calor específico del aire a presión constante 0,237.
Equivalente mecánico de la caloría 4,17 julios.

1.º 0,24 culombios
2.º $m=0{,}936$ gramos
3.º $V=1{,}51$ litros

10 Una esfera metálica de 10 cm de radio aislada, se carga a una tensión de 5000 voltios. ¿Cuál es su carga en culombios? A continuación se une a otra esfera de 8 cm de radio que está descargada y aislada. Determinar:

1.º La carga de cada esfera.
2.º El potencial común de ambas.

$$\text{Carga inicial de la esfera} = \frac{5}{9}\cdot 10^{-7} \text{ culombios}$$

$$\text{Carga de la primera esfera después de la unión} = \frac{25}{81}\cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$\text{Carga de la segunda esfera después de la unión} = \frac{20}{81}\cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$\text{Potencial común} = \frac{25\,000}{9} \text{ voltios}$$

11 Se montan en serie tres acumuladores de 2 voltios de f. e. m., cuya resistencia interna es de 0,6 ohmios, en cada uno de ellos, y se disponen en un circuito con dos resistencias en derivación, una de las cuales tiene una resistencia de un ohmio y la recorre una corriente de 0,9 amperios. Calcular:

1.º El valor de la otra resistencia.

2.º La intensidad de la corriente que circula por dicha resistencia.

3.º Si se comunica el calor desarrollado por esta resistencia durante 30 minutos a una mezcla de 100 gramos de agua y 5 gramos de hielo, determinar la temperatura final, sabiendo que el calor de fusión del hielo es de 80 calorías.

4.º Si el calor desarrollado en 10 minutos se comunica a un trozo de plata de 500 gramos, calcular la elevación de temperatura producida, sabiendo que el calor específico de la plata es de 0.056 cal/g grado.

1.º 0.466 Ω
2.º 1,93 A
3.º $t=3{,}33$°C
4.° $\Delta t=8{,}93$°C

12 Se tiene un aparato eléctrico de destilar éter, el cual permite destilar 900 g de eter por hora, empleando una fuente de corriente continua de 220 voltios. El hilo metálico de calefacción del aparato tiene 0,15 mm de diámetro y 110 microohmios-centímetro de resistividad. Se admite que ésta no varía con la temperatura y que las pérdidas de calor en el aparato son despreciables. Se pide:

1.º Potencia consumida por el aparato.
2.º Intensidad de la corriente en el circuito de calefacción.
3.º Resistencia de este circuito.
4.º Longitud del hilo de calefacción.
5.º Coste de la destilación de 9 kg de éter.

Datos:
Calor de evaporación del éter a la temperatura de ebullición 91 calorías.
Equivalente mecánico de la caloría 4,17 julios.
Precio de la energía eléctrica 3 ptas. kilovatio-hora.

1.º $P = 94{,}86$ W
2.º $I = 0{,}43$ A
3.º $R = 510\ \Omega$
4.º $l = 819{,}3$ cm
5.º coste = 2.95 ptas.

13 Entre dos bornes de diferencia de potencial constante de 110 voltios, están montados en serie un reóstato, un motor y una cuba electrolítica que contiene una disolución de sulfato de cobre con electrodos de cobre.

1.º Cuando el motor está en reposo, se depositan en el cátodo 3.522 g de cobre en 18 minutos. Calcular la resistencia total de todo el circuito.

2.º Cuando el motor funciona, el mismo peso de cobre es depositado en 30 minutos. Calcular la fuerza contraelectromotriz del motor y su potencia.

1.º $R = 11\ \Omega$
2.º f. c. e. m. = 44 V
Potencia = 264 W.

14 Se dispone de 8 pilas, cuyas características son: f.e.m. = 2 voltios y resistencia interna = 3 ohmios. Calcular:

1.º La intensidad dada por una sola pila a través de un circuito exterior de un ohmio.
2.º La intensidad a través del mismo circuito, si se acoplan las 8 pilas en serie.
3.º ídem, ídem, acopladas en paralelo.
4.º Calor que se desprende por minuto en el circuito externo, en el acoplamiento último.

1.º Intensidad = 0,5 amperios
2.º » = 0,64 »
3.º » = 1,45 »
4.º Cantidad de calor = 30,5 calorías.

15 Un motor eléctrico mueve a una bomba hidráulica que toma agua del río y la eleva a un depósito cilíndrico de 6 metros cuadrados de base y 2 metros de altura. Desde el río hasta el centro del depósito hay un desnivel de 15 metros y el depósito se llena en una hora por arriba. Se pide:

1.º Volumen del depósito, en litros, y caudal en la tubería, expresado en litros por segundo. Velocidad del agua en la tubería, cuya sección es de 0,6 dm^2.

2.º Trabajo teórico necesario para elevar el agua hasta llenar el depósito, expresando este trabajo en kilográmetros y en julios.

3.º El motor funciona con una diferencia de potencial de 220 voltios y una intensidad de 5 amperios. ¿Qué potencia toma el motor de la red eléctrica? ¿Qué parte de esta potencia se transforma en calor en el motor mismo, cuya resistencia interna es de 4 ohmios? ¿Cuánto trabajo mecánico, en julios, proporciona el motor a la bomba? Comparando este trabajo con el calculado en la segunda parte de este problema, calcular el rendimiento de la bomba hidráulica.

1.º Volumen = 12 000 litros; caudal = $\frac{10}{3}$ litro/s; velocidad = $\frac{5}{9}$ m/s.

2.º Trabajo = 192 000 kgm = 1 881 600 julios

3.º Potencia = 11 000 W. Se transforman en calor 100 W.
El motor proporciona a la bomba en una hora $36 \cdot 10^5$ julios
Rendimiento = 52,2 %

16 Una lámpara de incandescencia conectada a 120 voltios se sumerge en un calorímetro que contiene 400 g de petróleo de calor específico 0,5 calorías/gramo. Al cabo de un minuto cuarenta segundos, la temperatura del petróleo se ha elevado 6 grados. Calcular:

a) La cantidad de calor desarrollada.

b) La intensidad de la corriente y la resistencia de la lámpara.

c) El gasto que supone tener encendida la lámpara 5 horas, siendo 2 ptas. el precio del kilovatio-hora.

d) Poniendo en serie con la lámpara una resistencia R', fuera del calorímetro, se tiene la misma elevación de temperatura en el petróleo en 6 minutos 40 segundos. ¿Cuál es el valor de esa resistencia?

a) 1200 calorías

b) $I = \frac{5}{12}$ A. $\quad R = 288\ \Omega$

c) 0,50 ptas.

d) $R = 288\ \Omega$

17 Dos resistencias están montadas en derivación en un circuito cuya corriente principal es de 0,5 amperios. Una de las resistencias está dentro de un calorímetro, produciendo 288 calorías en 10 minutos.

1.º Sabiendo que la intensidad de la corriente que pasa por la otra resistencia es de 0,4 amperios, calcular el valor de la resistencia introducida en el calorímetro.

2.º Calcular la resistencia equivalente a las dos montadas en derivación.

3.º Calcular la f. e. m. del generador capaz de mantener en el circuito la intensidad de 0,5 amperios, siendo su resistencia interior de 1 ohmio.

4.º Si se sustituyen las dos resistencias en derivación por un conductor cilíndrico de 32.805 g, calcular su longitud para que no se modifique su intensidad. Resistividad del conductor $1{,}8 \cdot 10^{-6}$; densidad del metal, 9 g/cm³.

1.º $R = 200\ \Omega$
2.º $R = 40\ \Omega$
3.º f. e. m. = 20,5 V
4.º $l = 90$ m

18 Una batería de 12 acumuladores (f. e. m. de un elemento 2 V, $r = 0{,}5$ ohmios) asociados en dos series de 6 elementos, alimenta un circuito formado por un voltámetro

en serie, que contiene agua acidulada con ácido sulfúrico (fuerza contraelectromotriz 1,6 V, $r=0{,}2$ ohmios) y una derivación formada por una resistencia óhmica de 5 ohmios y un solenoide de 3 ohmios. Determinar:

1.º La intensidad de la corriente.

2.º El peso de oxígeno y volumen de hidrógeno medido en condiciones normales desprendido por la corriente en una hora. Equivalente del oxígeno=8.

3.º El tiempo que ha debido pasar la corriente por la resistencia «óhmica» para que el calor desprendido calentara 400 gramos de mercurio de 20° a 70°C (calor específico 0,033).

4.º Suponiendo que el solenoide tiene 60 espiras y 12 cm de longitud determinar el valor de la inducción en un punto de su parte central, *a*) en el vacío, *b*) suponiendo que contiene una sustancia cuya permeabilidad relativa es $K_m=800$.

1.º $I=2{,}9$ A

2.º $m_0=0{,}867$ gramos; $V_H=1{,}2$ litros

3.º $t=7^m\ 41^s$

4.º *a*) $8{,}28\cdot10^{-4}$ wb/m²
b) 0,66 wb/m²

19 Una lente convergente de radios iguales y distancia focal 50 cm proyecta sobre una pantalla la imagen real de un objeto de 5 cm de longitud.

1.º Calcular la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen sea de longitud igual a 4 decímetros.

2.º Si el índice de refracción de la lente es igual a 1,5, ¿qué valor tienen los radios de la lente y cuál es el poder convergente de la misma?

3.º Si en la posición anterior sustituimos la lente por otra cuyo poder convergente sea la mitad de la primera. ¿Cuánto habrá que desplazar la pantalla para recoger la imagen real y en qué sentido.

4.º Acoplándola a la primera lente otra para que la imagen sea doble que el objeto, ¿qué clase de lente debe emplearse y cuál será la convergencia del sistema?

1.º 450 cm

2.º $R=50$ cm
$c=2$ dioptrias.

3.º 450 cm hacia la derecha

4.ª Acoplaremos una lente divergente de $\frac{4}{3}$ dioptria.
Convergencia del sistema $=\frac{2}{3}$ de dioptria.

20 Un doblete está formado por la unión de dos lentes, una plano convexa y otra bicóncava; el índice de refracción de la primera es de 1,3 y el de la segunda 1,4. El radio de las superficies curvas es de 10 cm. Determinar:

1.º La potencia del sistema.

2.º El radio de la lente plano cóncava o plano convexa equivalente, si se hace con vidrio de índice de refracción, 1,5.

3.º ¿Dónde se formará la imagen de un punto situado sobre el eje del sistema, a 15 cm del mismo?

1.º Potencia = — 5 dioptrías.
2.º Equivale a una lente plano cóncava de 10 cm de radio.
3.º Se forma a 8,57 cm a la izquierda del sistema (imagen virtual)

21 Con un aparato fotográfico cuyo objetivo tiene una distancia focal de 20 cm sacamos una foto de un coche que corre a la velocidad de 60 km/h a 100 m, por delante de nosotros y en dirección perpendicular al eje del objetivo. Se pide:

1.º Calcular el tiempo máximo de exposición sabiendo qué la foto es nítida si durante la exposición un punto imagen no se desplaza más de 0,1 mm.

2.º Si la distancia máxima entre el objetivo y la placa es de 21 cm, ¿cuál será la mínima distancia a que podemos sacar una foto correcta?

3.º Si quisiéramos con este aparato retratar un objeto situado a 40 cm del objetivo, ¿qué lente hemos de colocar yuxtapuesta al objetivo?

1.º $2{,}99 \cdot 10^{-3}$ segundos

2.º 420 cm

3.º Una convergente de $f = 44{,}2$ cm

Problemas resueltos

1 Un cañón de 30 cm de diámetro y 15 m de longitud lanza un proyectil de 350 kg comunicándole una velocidad inicial de 900 m/s y llega al blanco con una velocidad de 540 m/s. Se supone que el movimiento del proyectil dentro del tubo del cañón es uniformemente acelerado, debido a la fuerza constante de los gases de combustión de la pólvora. Se desea saber:

1.º Aceleración del proyectil dentro del tubo del cañón.

2.º Tiempo invertido para recorrer la longitud del tubo del cañón.

3.º Fuerza ejercida por los gases de la pólvora sobre el proyectil.

4.º Presión de estos gases sobre la base del proyectil.

5.º Energía cinética del proyectil a la salida del cañón y a su llegada al blanco.

1.º

$v = at$

$l = \frac{1}{2}\, at^2$

$$a = \frac{v^2}{2l} = \frac{900^2}{2 \cdot 15} = 27\,000 \text{ m/s}^2$$

2.º $$t = \frac{2l}{v} = \frac{2 \cdot 15}{900} = \frac{1}{30} \text{ s}$$

3.º $$F = m \cdot a = 350 \cdot 27\,000 = 945 \cdot 10^4 \text{ newton}$$

4.º $$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{945 \cdot 10^4}{3{,}14 \cdot 0{,}15^2} = 133{,}75 \cdot 10^6 \text{ newton/m}^2 = 1320 \text{ atm.}$$

5.º $E = \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2}\, 350 \cdot 900^2 = 14\,175 \cdot 10^4$ julios

$E = \frac{1}{2}\, mv'^2 = \frac{1}{2}\, 350 \cdot 540^2 = 5103 \cdot 10^4$ julios

2 Una rueda de fuegos artificiales de un metro de radio, lleva sujetos, en los extremos de un diámetro, dos cartuchos, que al arder ejercen dos fuerzas iguales, constantes, tangenciales y de sentidos contrarios.

1) ¿Qué clase de movimiento será el de la rueda? (Se desprecia la resistencia del aire y la pérdida de masa de los cartuchos, mientras se queman.)

2) Cada cartucho produce una fuerza de 0.25 kilopondios. Calcular el momento del par de fuerzas que hace girar a la rueda, expresándolo en kp·m y en unidades Giorgi, y cuál es la dirección y sentido del vector momento, si vemos girar las ruedas en el sentido de las agujas de un reloj.

3) Si en los 10 primeros segundos ha dado la rueda 5 vueltas, ¿cuántos radianes ha girado y cuánto trabajo ha producido la combustión de la pólvora?

4) Calcular la aceleración angular de la rueda y su velocidad angular al cabo de los 10 segundos?

1) El movimiento es de rotación, uniformemente acelerado, por ser el momento del par de fuerzas constante.

2) $M=F\cdot d=0{,}25\cdot 2=0{,}50$ kp·m$=4{,}9$ N·m. Su dirección perpendicular al plano de la rueda y su sentido el de avance de un sacacorchos que gira en el mismo sentido que la rueda.

3) Ha girado $5\cdot 2\pi=10\pi$ radianes.
El trabajo$=M\cdot\varphi=4{,}9\cdot 10\pi=49\pi$ julios

4) El ángulo girado $10\pi=\frac{1}{2}\ \alpha\cdot 10^2$; $\alpha=\frac{\pi}{5}$ rad/s^2

$$\omega=\alpha t=\frac{\pi}{5}\cdot 10=2\pi \text{ rad/s}$$

3 Con una honda de 0,75 m de radio se hace girar una piedra de 250 gramos a razón de 300 vueltas por minuto, en un plano horizontal, a 2 m del suelo. Calcúlese:

1.º La tensión de la cuerda, supuesta despreciable su masa.

2.º La energía cinética de la piedra girando.

3.º La velocidad con que sale despedida la piedra al soltar uno de los cabos de la honda.

4.º El tiempo que tardará en llegar al suelo, supuesto horizontal, y despreciando la resistencia del aire·$g=9{,}8$ m/s^2.

5.º La distancia a que caerá la piedra.

1.º $E=\frac{mv^2}{R}=m\omega^2R=0{,}25\cdot\left(2\pi\cdot\frac{300}{60}\right)^2\cdot 0{,}75=187{,}5$ newton$=19{,}1$ kp

2.º $E_c=\frac{1}{2}\ mv^2=\frac{1}{2}\ m\omega^2R^2=\frac{1}{2}\ 0{,}25\cdot(2\pi\cdot 5)^2\cdot 0{,}75^2=70{,}31$ julios

3.º $v=\omega R=2\pi\cdot 5\cdot 0{,}75=23{,}55$ m/s

4.º $h=\frac{1}{2}\ gt^2$; $t=\sqrt{\frac{2\cdot 2}{9{,}8}}=0{,}63$ segundos

5.º $x=vt=23{,}55\cdot 0{,}63=14{,}83$ metros

4 Un disco homogéneo de 50 cm de radio puede girar alrededor de un eje.

1.º Calcular su momento de inercia si tiene una masa de 2 kilogramos.

2.º Si tangencialmente se le aplica una fuerza de 40 newton durante 10 segundos. ¿qué velocidad angular adquirirá y cuál será su energía cinética?

3.º Suponiendo que después se frena y toda la energía del disco se convierte en calor, del cual se utiliza el 80 % en calentar 500 gramos de agua, calcular el aumento de temperatura que experimentará ésta.

1.º $I=\frac{1}{2}\ mR^2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0{,}5^2=0{,}25$ kg·m^2

2.º $M\cdot t=I\Delta\omega$; $\Delta\omega=\omega=\frac{Mt}{I}=\frac{40\cdot 0{,}5\cdot 10}{0{,}25}=800$ rad/s

$E_c=\frac{1}{2}\ I\omega^2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}25\cdot 800^2=8\cdot 10^4$ julios

3.º $\frac{80}{100}\cdot 0{,}24\cdot 8\cdot 10^4=500\cdot\Delta T$; $\Delta T=30{,}7$°C

5 Una fuerza de 2 kg, actúa durante tres segundos sobre un cuerpo de 9,8 g de masa:

1.º ¿Cuál es el impulso de la fuerza?

2.º ¿Qué velocidad le comunica al cuerpo?

3.º ¿Cuál es la energía cinética que adquiere el cuerpo?

4.º Después de haber estado en movimiento un cierto tiempo choca con un aro circular fijo por su centro. El choque es tangencial y el cuerpo queda incrustado en el aro. ¿Cuál es la velocidad que adquiere el conjunto si la masa del aro es de 2 kg y 5 cm su diámetro.

1.º Impulso $= F \cdot t = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 3 = 58{,}8$ newton $\cdot s$.

2.º $Ft = m(v - v_0)$; $\quad v_0 = 0$; $\quad v = \dfrac{F \cdot t}{m} = \dfrac{58{,}8}{0{,}0098} = 6000$ m/s.

3.º $E_c = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2}\ 0{,}0098 \cdot (6000)^2 = 176\,400$ julios

4.º Los momentos cinéticos deben de ser iguales antes y después del choque: $mv \cdot R = I\omega$; $\quad I = m R^2 + mR^2$

$$9{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 6000 \cdot \frac{2{,}5}{100} = \left[2 \cdot (0{,}05)^2 + \frac{9{,}8}{1000}\ (0{,}05)^2 \right] \omega$$

$$\omega = \frac{58{,}8}{2{,}0098 \cdot 0{,}05} = 582 \text{ rad/s}$$

$$v = \omega R = 582 \cdot 0{,}05 = 29{,}25 \text{ m/s}$$

6 Se hace girar un cilindro macizo de 20 cm de radio y 5 kg de masa alrededor de su eje, colocado éste horizontalmente, arrollando sobre dicho cilindro una cuerda de peso despreciable sujeta por un extremo al mismo y de la que pende por el otro extremo un peso de 50 gramos.

Se desea saber:

a) Cuál es el momento de inercia del cilindro.

b) Cuál es el momento del par que lo hace girar.

c) Cuál es la aceleración angular con que se mueve el cilindro.

d) Cuál es la aceleración lineal con que se mueve el peso suspendido.

e) A qué tensión está sometida la cuerda mientras cae el peso. Se desprecian los rozamientos.

a) $I = \frac{1}{2}\ mR^2 = \frac{1}{2}\ 5 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1$ kg$\cdot$m^2

b) El par que inicia el movimiento tiene por momento $M = F \cdot R = mgR$, luego $M = 50 \cdot 980 \cdot 0{,}2 = 9800$ dinas $= 0{,}098$ newton

c) $M = I\alpha$, pero hay que tener presente que cuando se mueve el peso existe una fuerza de inercia igual a $-ma = -mRd$. Luego $M = F \cdot R - mR^2\alpha = I\alpha$.

$$mgR = (I + mR^2)\alpha; \qquad \alpha = \frac{mgR}{I + mR^2} = \frac{0{,}098}{0{,}1 + \dfrac{50}{1000} \cdot 0{,}2^2}$$

$$\alpha = \frac{0{,}098}{0{,}102} = 0{,}960 \text{ rad/s}^2$$

d) $a = \alpha \cdot R = 0{,}192$ m/s^2

e) $\begin{cases} T = F - F_i \\ T = mg - ma = m(g - a) = \dfrac{50}{1000}\ (9{,}8 - 0{,}192) = 0{,}480 \text{ newton} \end{cases}$

7 Por la garganta de una polea, cuyo peso y rozamiento son despreciables, de radio un decímetro, pasa una cuerda de uno de cuyos extremos lleva un peso de 2 kg y en el otro un peso de 4 kg. Se pide:

1) La aceleración con que se moverán los pesos si se deja al sistema en libertad.

2) La aceleración angular de la polea.

3) La tensión de la cuerda.

4) Si inicialmente los pesos estaban en el mismo plano, calcular el tiempo que tardarán en desnivelarse seis metros.

1) $a=\dfrac{m'-m}{m'+m}\,g=\dfrac{4-2}{4+2}\,9{,}80=3{,}266\ \text{m/s}^2$

2) $\alpha=a/R=32{,}66\ \text{rad/s}^2$

3) $T=m'g-m'a=m'(g-a)=4(9{,}80-\frac{1}{3}\cdot 9{,}80)=26{,}13\ \text{N}$

4) Para desnivelarse seis metros, uno de los pesos ha de recorrer 3 m luego $3=\frac{1}{2}\ 3{,}26\ t^2$ de donde $t=1{,}36$ segundos.

8 La masa de la Luna es aproximadamente $6{,}7\cdot 10^{22}$ kg, y su radio, $16\cdot 10^5$ metros.

Constante de la gravitación $=6{,}67\cdot 10^{-11}$ newton$\cdot$m^2/kg^2.

a) ¿Qué distancia recorrería un cuerpo en un segundo, en caída libre hacia la Luna, si se abandona en un punto próximo a la superficie de aquélla?

b) ¿Cuál será el período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es de 1 segundo?

c) En la superficie terrestre, al colocar un cuerpo en un platillo de la balanza y en el otro platillo 23,15 gramos, se consigue el equilibrio. ¿Qué pesas tendríamos que utilizar para equilibrar, igualmente, el mismo cuerpo en la superficie lunar?

a) $g_L=G\,\dfrac{m^2}{R_L^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\,\dfrac{6{,}7\cdot 10^{-22}}{16^2\cdot 10^{10}}=1{,}745/\text{s}^2$

$e=\frac{1}{2}\ g_2t^2=\frac{1}{2}\cdot 1{,}745\cdot 1^2=0{,}8725$ metros.

b)

$$T_T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_T}}$$

$$T_L=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{g_L}{g_T}};\qquad T_2=T_1\sqrt{\frac{g_T}{g_L}}=1\sqrt{\frac{9{,}806}{1{,}745}}=2.37\ \text{s}$$

c) La misma masa de 23,15 gramos.

9 Un trozo de madera de un kilogramo de peso y densidad 0,6 se lanza verticalmente hacia abajo, con una velocidad $\sqrt{2}$ m/s, desde un punto situado a 5 m de altura sobre la superficie de un depósito de aceite de densidad 0,9. Calcular:

a) La velocidad con que llega a la superficie del líquido.

b) El empuje que sufre una vez sumergido.

c) La aceleración con que se mueve en el interior del líquido.

d) La profundidad a que desciende y el tiempo invertido en dicho descenso. Se desprecian las resistencias del aire y del agua y se supone nulo el tiempo invertido en atravesar la superficie.

a) $\frac{1}{2}\ mv^2=\frac{1}{2}\ mv_0^2+mgh$; $\quad v=\sqrt{v_0^2+2gh}=\sqrt{2+2\cdot 9{,}8\cdot 5}=10$ m/s

b) $E=v\delta g=\frac{m}{d}\ \delta g=\frac{1}{0{,}6}\cdot 0{,}9\cdot 9{,}8=14{,}7$ newton $=1{,}5$ kp

c) $a=\frac{mg-E}{m}=g-\frac{E}{m}=9{,}8-14{,}7=-4{,}9$ m/s^2

el sentido de la aceleración es pues hacia arriba.

d) $o=v-at$; $\quad t=\frac{v}{a}=\frac{10}{4{,}9}=2{,}04$ segundos

$$r=vt-\frac{1}{2}\ at^2=10\cdot\frac{10}{4{,}9}-\frac{1}{2}\ 4{,}9\cdot\left(\frac{10}{4{,}9}\right)^2=\frac{1}{2}\ \frac{100}{4{,}9}=10{,}2 \text{ metros}$$

10 Un cilindro vertical AB de 40 cm de longitud y 10 cm^2 de sección interior contiene un pistón horizontal de cierre hermético resbalando sin rozamiento, de espesor despreciable y de peso igual a 5 kg. Las bases del cilindro tienen sendas llaves para comunicar con el exterior.

Tomamos la presión atmosférica igual a 1 kp/cm^2 y el peso de 1 litro de aire bajo esta presión igual a 1,3 gramos.

1.º Se encuentra el pistón a la mitad del recorrido y las llaves están abiertas. Se cierra la llave correspondiente a la base inferior y el pistón desciende. ¿Qué longitud desciende?

2.º Partiendo de la misma posición anterior, se cierra simultáneamente las dos llaves. ¿Cuál es el desplazamiento en este caso?

3.º Resuelto el primer caso, en la posición de equilibrio, se inyecta aire por la llave inferior. ¿Qué masa de aire es preciso inyectar para que el pistón se coloque nuevamente en la mitad de la altura del cilindro?

1.º $p=1+\frac{5}{10}=1{,}5$ kp/cm^2

$p_0v_0=p'v'$

$1\cdot 10\cdot 20=p'10(20-x)$

$p=p'=1{,}5$

$200=1{,}5\cdot 10(20-x)$

$x=20-\frac{20}{1{,}5}=\frac{20}{3}$ cm.

2.º En la parte superior

$$p_0v_0=p_1v_1; \qquad p_1+\frac{5}{10}=p_2$$

en la inferior

$$p_0v_0=p_2v_2$$

$$1\cdot10\cdot20=p_1(10\cdot20+10x)$$
$$1\cdot10\cdot20=p_2(10\cdot20-10x)$$

$$\frac{20}{20+x}+\frac{5}{10}=\frac{20}{20-x}$$

$$\frac{20}{20+x}+\frac{1}{2}=\frac{20}{20-x}$$

$$40(20-x)+400-x^2=(20+x)\cdot40$$

$$800-40x+400-x^2=800+40x$$

$$x^2+80x-400=0;\qquad x=40\pm\sqrt{1600+400}=-40\pm\sqrt{2000}$$

$$x=-40\pm20\sqrt{5}\begin{cases}4{,}6 \text{ única válida}\\ -84{,}6\end{cases}$$

Ha descendido 4,6 cm.

3.º Basta que la presión parcial del aire inyectado sea igual a la presión del pistón $p=0{,}5$ kp/cm^2

$$m=v_0d_0=\frac{pv}{p_0}d_0=\frac{0{,}5\cdot20\cdot10\cdot10^{-3}}{1}\cdot1{,}3=0{,}13 \text{ gramos}$$

11 *a*) Una vasija de un litro contiene 0,05 moles de hidrógeno a 20°C. Calcular la presión a que se encuentra el gas.

Se abre un momento una llave y parte del gas sale a la atmósfera.

b) Calcular la masa de hidrógeno que queda en la vasija, siendo la presión exterior exactamente una atmósfera.

c) ¿A qué temperatura se debe calentar el gas que ha quedado, cerrada la vasija, para que la presión recobre el valor que tenía inicialmente?

a) $pv=nRT;\qquad p=\dfrac{0{,}05\cdot0{,}082\cdot293}{1}=1{,}201$ atmósferas.

b) $p'=1$ atm.; $\quad r'=\dfrac{m'}{M}=\dfrac{p'v}{RT};\qquad m'=\dfrac{p'vM}{RT}=\dfrac{1\cdot1\cdot2}{0{,}082\cdot293}=0{,}0832$ gramos.

c) $T'=\dfrac{pv}{n'R}=\dfrac{1{,}201\cdot1}{\frac{0{,}0832}{2}\cdot0{,}082}=352°\text{K}=79°\text{C}.$

12 56 g de nitrógeno (peso molecular=28) están a la temperatura de 27°C. Se pide calcular:

a) La energía cinética total de sus moléculas ($R=8{,}3$ julios/mol. grado).

b) Si esta energía cinética se convirtiera en trabajo en 30 segundos. ¿Cuántos caballos de vapor desarrollaría?

c) Suponiendo que la masa de nitrógeno ocupa un volumen de 10 litros, a la citada temperatura, ¿qué presión ejercerá?

$$E_c=\tfrac{1}{2}\,mu^2N;\qquad pv=\tfrac{1}{3}\,Nmu^2;\qquad pv=nRT$$

a) $E_c=\dfrac{1}{2}\,mu^2\cdot N=\dfrac{3}{2}\,nRT=\dfrac{3}{2}\dfrac{56}{28}\cdot8{,}3\cdot(273+27)=7470$ julios.

b) $p=\frac{\mathcal{E}}{t}=\frac{7470}{30}=249$ vatios $=\frac{249}{736}$ CV $=0{,}35$ CV

c) $pv=nRT$; $\quad p=\frac{nRT}{v}=\frac{\frac{56}{28}\cdot 8\cdot 3\cdot 300}{\frac{10}{10^{4}}}=49\,800$ newton/m$^2=4{,}92$ atmósferas

13 Un motor de combustión interna de 50 HP, consume 253 g de aceite combustible de 10 000 cal/kg por cada HP-hora producido. Calcular:

1.º El rendimiento total del motor.

2.º El consumo diario de aceite a esta potencia.

3.º Si este motor transmite su potencia a un generador eléctrico. Cuál es la intensidad de corriente máxima que puede producir si el generador mantiene una tensión eléctrica de 220 V en la salida siendo el rendimiento global de transformación de energía mecánica en eléctrica del 80 %.

4.º Cuál será el coste del kW-h eléctrico, sabiendo que el litro de aceite cuesta 1.80 pesetas.

1.º Trabajo útil $1\cdot 736\cdot 60\cdot 60=2\,649\,600$ julios.
Trabajo total $253\cdot 10^{4}\cdot 4{,}17=1055{,}01\cdot 10^{4}$ julios.
$$\text{Rendimiento}=\frac{2\,649\,600}{10\,550\,100}=0{,}2511 \text{ o sea del } 25{,}11\ \%.$$

2.º $50\cdot 253\cdot 24=303\,600$ gramos $=303{,}600$ kg.

3.º $P=VI$; $\quad I=\frac{P}{V}=\frac{\frac{80}{100}\cdot 50\cdot 736}{220}=133{,}81$ A.

4.º 1 HP-h $=0{,}736$ kW-h.
Para producir 1 kW-h son necesarios $\frac{235}{0{,}736}\cdot\frac{100}{80}$ gramos de aceite.
Costarán $\frac{235\cdot 100}{0{,}736\cdot 80}\cdot\frac{1{,}80}{1000}=0{,}77$ ptas.

14 Una esfera de 8 cm de radio posee una carga eléctrica de 0.3 microculombios positivos. Calcular en unidades del sistema Giorgi:

1) El potencial en un punto de su superficie.

2) La densidad superficial de carga de la esfera

3) Su capacidad y el potencial en un punto situado a 12 cm de la superficie esférica.

4) La energía eléctrica almacenada en la esfera.

1) $V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}=9\cdot 10^{9}\cdot\frac{0{,}3\cdot 10^{-6}}{0{,}08}=33\,750$ V.

2) $\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}=3{,}6\cdot 10^{-6}$ C/m^2.

3) $C=\frac{Q}{V}=4\pi\epsilon_0 R=\frac{1}{9\cdot 10^{9}}\,0{,}08=8{,}8\cdot 10^{-12}$ F $=8.8$ pF.
$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}=9\cdot 10^{9}\,\frac{0{,}3\cdot 10^{-6}}{0.2}=13\,500$ V.

4) $U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\,0{,}3\cdot 10^{-6}\cdot 33\,750=5{,}06\cdot 10^{-3}$ julios.

15 Una balanza de brazos iguales está en equilibrio. Uno de sus platillos tiene una superficie de 200 cm^2 y está situado un centímetro por encima de una lámina metálica horizontal unida a tierra. Entre el platillo y la lámina se establece una diferencia de potencial de cien voltios. Calcular:

1.º La capacidad, en faradios, del condensador formado.
2.º Los gramos que hay que cargar en el otro platillo para restablecer el equilibrio perdido.
3.º La carga eléctrica, en culombios, que adquiere el platillo.

1.º $C = \frac{\epsilon_0 S}{h} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{100 - 10^{-4}}{0{,}01} = 17{,}7 \cdot 10^{-12}$ faradios

2.º La fuerza atractiva vale $F = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2}{S}$ (véase pág. 234)

como $Q = C\ (V_1 - V_2)$ $\quad F = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{C^2 V^2}{S}$

sustituyendo el valor de C ya calculado y la diferencia de potencial = 100 V

$$F = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 17 \cdot 7^2 \cdot 10^{-14} \cdot 100}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 0{,}89 \cdot 10^{-5} \text{ newton} = 0{,}89 \text{ dinas}$$

para equilibrar hará falta una carga de $\frac{0{,}89}{980} = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ gramos.

3.º $Q = C\,(V_1 - V_2) = 17{,}7 \cdot 10^{-12} \cdot 100 = 17{,}7 \cdot 10^{-10}$ culombios.

16 Se tienen tres condensadores C_1, C_2, C_3, de 2, 3, 5, microfaradios respectivamente. El primero se carga a 2000 voltios, el segundo a 1500 y el tercero a 3000 voltios. Calcúlese:

1.º La energía electrostática almacenada por cada uno de ellos.
2.º La diferencia de potencial que existirá entre las placas terminales del sistema formado por dichos condensadores cargados al conectarlos en serie.
3.º La diferencia de potencial que existirá entre las placas terminales del sistema formado por dichos condensadores cargados, al conectarlos en paralelo.
4.º La energía electrostática total en cada uno de los anteriores acoplamientos.

1.º $U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2}\, 2 \cdot 10^{-6} \cdot 2000^2 = 4$ julios.

$U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{1}{2}\, 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1500^2 = 3{,}375$ julios.

$U_3 = \frac{1}{2} C_3 V_3^2 = \frac{1}{2}\, 5 \cdot 10^{-6} \cdot 3000^2 = 22{,}5$ julios.

2.º La diferencia de potencial $= 2000 + 1500 + 3000 = 6500$ voltios.

3.º $Q = (C_1 + C_2 + C_3)\, V$; $\quad V = \frac{Q}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 2350$ voltios.

4.º En serie $U = 4 + 3{,}375 + 22{,}5 = 29{,}875$ julios.
En paralelo $U = \frac{1}{2}\,(C_1 + C_2 + C_3) V^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2350^2 = 27{,}6125$ julios.

17 Se montan cuatro pilas iguales, cuya fuerza electromotriz es de 2 voltios, en paralelo y se cierra el circuito intercalando una resistencia y un amperímetro, éste señala una corriente de 1,14 amperios (primer caso).

Se asocian tres de las pilas anteriores en paralelo y la pila restante en serie, se cierra el circuito intercalando la misma resistencia que en el caso anterior y el amperímetro, éste señala una corriente de 1,66 amperios (segundo caso).

¿Cuál es la resistencia interior de las pilas? ¿Cuál es la resistencia exterior?

En el segundo caso. ¿Qué diferencia de potencial marcaría un voltímetro colocado en derivación:

a) Sobre los extremos de la resistencia exterior.
b) Sobre los polos de la pila que se halla en serie.
c) Sobre los polos de una de las pilas asociadas en paralelo?

Sea R la resistencia exterior y r la interna de cada pila aplicando la ley de Ohm en el primer caso resulta:

$$1{,}14\ R=2-\frac{1{,}14}{4}r; \qquad 1{,}14\ R+0{,}285\ r=2$$

en el segundo caso:

$$1{,}66\ R=2-\frac{1.66}{3}r+2-1{,}66\ r; \qquad 1{,}66\ R+2{,}2133\ r=4$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones hallamos
$r=0.5$ ohm
$R=1.63$ ohm

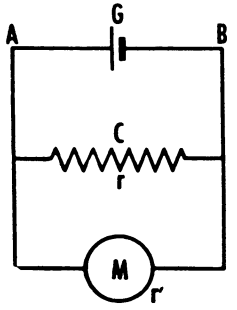
a) $V_R=1{,}66\cdot 1{,}63=2{,}70$ vatios.
b) $V_r=2-1{,}66\cdot 0{,}5=1{,}17$ voltios.
c) $V_p=2-\frac{1.66}{3}\cdot 0{,}5=1{,}72$ voltios.

18 Los polos *A* y *B* de un generador *G*, se reúnen por medio de dos derivaciones: la una *ACB*, es un hilo metálico de resistencia constante $r=15$ ohmios, la otra *AMB* de resistencia total constante $r'=30$ ohmios, incluye un pequeño motor eléctrico *M*. El generador *G* está constituido por 60 elementos de acumuladores dispuestos en serie, la fuerza electromotriz de un elemento es de 2 voltios y la resistencia interior despreciable.

1.º ¿Cuáles son los valores de la intensidad de la corriente en la batería y en cada derivación, cuando el motor no gira? (El motor parado se comporta como una simple resistencia.)

2.º Evaluar la potencia proporcionada por la batería. ¿Cómo se reparte esta potencia entre las diversas regiones del circuito?

3.º El motor gira y desarrolla una potencia mecánica de 120 vatios. ¿Cuáles son los nuevos valores de la intensidad de la corriente en cada parte del circuito? ¿Cómo se reparte la nueva potencia gastada?



Por ser la resistencia interior despreciable

$$V_A-V_B=\text{f. e. m.}=60\cdot 2=120\ \text{V}$$

La intensidad por $ACB=\frac{V_A-V_B}{r}=\frac{120}{15}=8$ A

La intensidad por $AMB=\frac{V_A-V_B}{r'}=\frac{120}{30}=4$ A

La intensidad de la corriente en la batería será

$$I=8+4=12\ \text{A}$$

2.º Potencia suministrada por la batería:

$$P=(\text{f. e. m})\times I=120\cdot 12=1440 \text{ vatios}$$

en la primera derivación $P_1=120\cdot 8=960$ vatios
en la segunda derivación $P_2=120\cdot 4=480$ vatios

3.º $(V_A-V_B)I'_2=I'^2_2\cdot\gamma'+120$

$$120I'_2=I'^2_2\cdot 3+120$$

En la 1.ª derivación $I'_1=I_1=8$ A
En la 2.ª derivación $I'_2=2$ A

Derivación total $I'=8+2=10$ A

$I'^2_2-4I'_2+4=0; \qquad I'_2=2$ A

Potencia en la 1.ª: $8 \cdot 120 = 960$ vatios
Potencia en la 2.ª: $2^2 \cdot 30 + 120 = 240$ vatios·
Potencia total: $120 \cdot 10 = 1200$ vatios

19 Un tubo de vidrio lleno de agua está cerrado por un extremo con una superficie esférica de vidrio delgadísimo, de 20 cm de radio, que separa el agua del aire, y de manera que su convexidad mira hacia el aire. Se desea saber:

1.º La distancia focal imagen de dicho dioptrio esférico.

2.º Su distancia focal objeto.

3.º La distancia en donde se formará la imagen de un objeto situado en el aire, perpendicular al eje principal y a 1 m del vértice del dioptrio.

4.º La naturaleza de la imagen.

5.º Sabiendo que el objeto es de 10 cm de altura calcular el tamaño de la imagen; y

6.º Dibujar un esquema de la marcha de los rayos.
Índice de refracción del agua: 1,33.

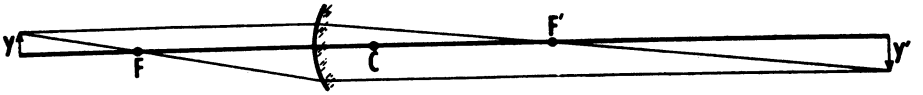
1.º $f' = \dfrac{n'}{n' - n} R = \dfrac{1{,}33}{1{,}33 - 1} \cdot 20 = 80{,}6$ cm.

2.º $f = -\dfrac{n}{n' - n} R = -\dfrac{1}{1{,}33 - 1} \cdot 20 = -60{,}6$ cm.

3.º $\dfrac{f}{x} + \dfrac{f'}{x'} = 1$; $\dfrac{f'}{x'} = 1 - \dfrac{f}{x}$; $x' = \dfrac{f'}{1 - \dfrac{f}{x}} = \dfrac{80{,}6}{1 - \dfrac{-60{,}6}{-100}} = 204{,}6$ cm.

4.º Imagen real.

5.º $y' = y \dfrac{n}{n'} \dfrac{x'}{x} = 10 \dfrac{1}{1{,}33} \dfrac{204{,}6}{-100} = -15{,}1$ cm (será invertida).



20 Se trata de instalar un cine en un salón de actos. La pantalla ha de tener 5,5 metros de anchura y la distancia desde la cabina del aparato proyector hasta la pantalla es de 25 metros.

Sabemos también que cada una de las fotografías de la cinta cinematográfica mide 22 milímetros de anchura y 16 de altura. Se pide:

1.º ¿Qué altura deberá tener la pantalla para que toda quede exactamente cubierta por la imagen? ¿Cuánto valdrá el aumento lateral?

2.º ¿Cuál ha de ser la distancia entre la película y el objetivo para que la imagen quede perfectamente enfocada, y cuál ha de ser la distancia focal del objetivo, considerándolo como una simple lente delgada? Deben dar el valor de la distancia focal aproximado; un error de ½ milímetro, en más o en menos, no tiene importancia.

3.º Si este objetivo fuese una lente planoconvexa delgada, ¿cuánto valdría el radio de curvatura de la cara esférica (índice de refracción del vidrio = 1,5)?

4.º Si colocamos un cartón junto al objetivo, tapando la mitad inferior del haz

de rayos. ¿qué veremos en la pantalla: la mitad superior de la imagen, o bien la mitad inferior, o bien toda la imagen, aunque desigualmente iluminada? Razone la respuesta.

5.º Si el objetivo no constase de una sola lente, como habíamos supuesto, sino de dos lentes delgadas, iguales y yuxtapuestas, ¿de cuántas dioptrias tendría que ser cada una?

1.º $-\frac{5500}{22}=\frac{h}{16}$; $\quad h=\frac{5500\cdot 16}{22}=4000$ mm $=4$ m.

$\text{Aumento}=\frac{5500}{22}=250.$

2.º $\text{Aumento}=\frac{d'}{d}=\frac{25}{d}=250$; $\quad d=\frac{25}{250}=0{,}1$ m $=10$ cm.

$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{f}$; $\quad \frac{1}{0{,}1}+\frac{1}{25}=\frac{1}{f}$; $\quad f=\frac{2{,}5}{25{,}1}=0{,}0996\simeq 0{,}1$ m.

3.º $\frac{1}{f}=(x-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$; $\quad \frac{1}{0{,}1}=(1{,}5-1)\frac{1}{R_1}$; $\quad R_1=0{,}1\cdot 0{,}5=0{,}05$ m $=5$ cm.

4.º Si los rayos que llegan al objetivo fuesen rigurosamente paralelos, veríamos la mitad inferior. En general no es así y se verá toda la imagen desigualmente iluminada.

5.º $p=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=p_1+p_2=2p_1$; $\quad p_1=\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}\frac{1}{f}=\frac{1}{2}\frac{1}{0{,}1}=5$ dioptrias cada una.

INDICE

Primera Parte

MECÁNICA

I. NOCIONES DE CÁLCULO VECTORIAL 3

Magnitudes escalares y vectoriales. — Vector. — Componentes de un vector. — Suma de vectores. — Diferencia de vectores. — Producto de un escalar por un vector. — Producto escalar de dos vectores. — Producto vectorial de dos vectores. — Derivada de un vector respecto de un escalar. — *Cuestiones.* — *Problemas.*

II. CINEMÁTICA 15

Generalidades. — Velocidad media. — Velocidad instantánea. — Aceleración. — Unidades de velocidad y aceleración. — Cinemática del movimiento uniforme. — Movimiento rectilíneo uniformemente variado. — Movimiento circular. — Movimiento circular uniforme. — Movimiento armónico simple. — Ecuación del movimiento armónico simple. — Velocidad y aceleración. — Composición de movimientos. — Resultante de dos movimientos armónicos simples. — Movimiento de proyectiles. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

III. ESTÁTICA 45

Concepto estático de fuerza. — Carácter vectorial de las fuerzas. — Composición de fuerzas aplicadas a un punto. — Par de fuerzas. — Momento de un par. — Vector momento. — Sistemas equivalentes. — Composición de fuerzas aplicadas a un sólido. — Sistema nulo o equilibrado. — Condición de equilibrio de

un sólido. — Resultante de un sistema de fuerzas paralelas. — Centro de gravedad. — Método experimental. — APÉNDICES. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

IV. DINÁMICA 75

Definición. — Principios de la dinámica. — Principio de la inercia. — Principio de la proporcionalidad entre fuerzas y aceleraciones. — Principio de la acción y la reacción. — Fuerzas de inercia. — Dinámica de los movimientos. — Concepto de impulso mecánico y de cantidad de movimiento. — Unidades y dimensiones. — Conservación de la cantidad de movimiento. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

V. TRABAJO Y ENERGÍA 85

El trabajo como producto escalar. — Unidades. — Dimensiones. — Trabajo de una fuerza variable. — Potencia. — Unidades. — Energía cinética. — Teorema de las fuerzas vivas. — Energía potencial gravitatoria. — Conservación de la energía mecánica. — APÉNDICES. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

VI. ROTACIONES 103

Analogías dinámicas entre el movimiento de traslación y de rotación. — Momento de inercia. — Radio de giro. — Momento cinético e impulso angular. — Energía cinética de rotación. — Trabajo en la rotación. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

VII. GRAVITACIÓN UNIVERSAL 114

Leyes de Kepler. — Deducción de la ley de Newton. — Campo gravitatorio terrestre. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

VIII. MOVIMIENTOS ARMÓNICOS: PÉNDULO 119

Dinámica del movimiento armónico simple. — Péndulo simple. — Dinámica de las pequeñas oscilaciones. — Movimiento armónico de rotación. — Péndulo físico. — Centro de oscilación. — Centro de percusión. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

IX. ESTÁTICA DE FLUIDOS 133

Ecuación fundamental de la estática de fluidos. — Consecuencias. — Principio de Arquímedes. — Aplicaciones del principio de Arquímedes. — Presión atmosférica. — Compresibilidad de los gases. — Ley de Boyle. — Manómetros. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

Segunda Parte

CALOR

X. TERMOMETRÍA. DILATACIÓN 153

Dilatación de sólidos. — Dilatación de los líquidos. — Dilatación de los gases. — Escala absoluta de temperatura. — Ecuación de estado de los gases perfectos. — Hipótesis de Avogadro. — Ecuación $pv = nRT$. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XI. CALORIMETRÍA 169

Calores específicos de sólidos y líquidos. — Medidas calorimétricas. — Calores específicos de gases. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XII. CAMBIOS DE ESTADO 183

Vaporización y condensación. — Propiedades de los vapores saturados y no saturados. — Higrometría. — Fusión y solidificación. — Sublimación. — Calores de cambio de estado. — Punto triple. — Licuación de gases. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XIII. EQUIVALENCIAS CALOR-TRABAJO 201

Prácticas. — *Problemas.*

Tercera Parte

ELECTRICIDAD

XIV. CARGA, CAMPO Y POTENCIAL ELÉCTRICO 205

Ley de Coulomb. — Campo eléctrico. — Cálculo de la intensidad del campo en algunos casos sencillos. — Líneas de fuerza. — Flujo eléctrico. — Teorema de Gauss. — Concepto de potencial en un punto. — Cálculo del potencial en un punto de un campo radial. — Gradiente de potencial. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XV. CONDENSADORES 223

Cargas eléctricas inducidas sobre un conductor y sobre un dieléctrico. — Dieléctricos. — Condensadores: capacidad de un condensador. — Estudio del condensador plano. — Fuerza atractiva entre las armaduras de un condensador plano. — Energía de un condensador cargado. — Asociación de condensadores. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XVI. CORRIENTE ELÉCTRICA CONSTANTE 247

Mecanismo íntimo de la corriente eléctrica en un condensador

metálico. — Intensidad de la corriente. — Deducción de la ley de Ohm para un hilo conductor. — Resistencia y resistividad. — Deducción de la ley de Joule. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XVII. CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA 259

Concepto de fuerza electromotriz. — Ley de Ohm generalizada. — Potenciómetro. — Resistencias en serie y en paralelo. — Redes. — Reglas de Kirchhoff. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XVIII. ELECTROMAGNETISMO 275

Campo magnético. — Definición del vector $\vec{B}$. — Fuerza ejercida por un campo magnético sobre un conductor rectilíneo. — Fuerza sobre una espira. — Fuerza sobre un solenoide. — Campo magnético creado por una carga en movimiento. — Campo creado por un elemento de corriente. — Campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida. — Campo magnético creado por una espira. — Campo creado por un solenoide recto y uno circular. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

XIX. INSTRUMENTOS DE MEDIDA 291

Galvanómetros. — Amperímetros y voltímetros. — *Cuestiones.* — *Problemas.*

Cuarta Parte

ÓPTICA

XX. PROPAGACIÓN, REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE LA LUZ 297

Propagación rectilínea de la luz. — Velocidad de propagación. — Índice absoluto de refracción. — Reflexión y refracción de una onda plana en una superficie plana. — Leyes de la reflexión y de la refracción. — Ángulo límite y reflexión total. — *Prácticas.*

XXI. DIOPTRIO PLANO 309

Imágenes producidas por un dioptrio plano. — Marcha de la luz a través de una lámina de caras paralelas e imágenes producidas. — Marcha de la luz a través de un prisma. — Estudio de la desviación. — *Prácticas.*

XXII. DIOPTRIO ESFÉRICO 319

Conceptos generales sobre imágenes. — Dioptrio esférico. — De-

ducción de la fórmula general del dioptrio esférico. — Condiciones de estigmatismo perfecto y de estigmatismo aproximado: fórmulas de Gauss, Abbe y Newton. — Aumento angular y aumento lateral. Invariante de Helmhotz. — *Prácticas.*

XXIII. SISTEMAS ÓPTICOS CENTRADOS 329

Definición de focos y planos focales. — Puntos y planos principales. — Relaciones fundamentales. — Combinación de sistemas ópticos. — Lentes esféricas. — Determinación gráfica de los focos y de los planos principales de una lente gruesa. — Determinación analítica de las distancias focales y posición de los planos principales en una lente esférica gruesa. — Construcción de imágenes conociendo los focos y los planos principales. — Deducción de las fórmulas de las lentes esféricas delgadas. — Formación de imágenes en las lentes. — Potencia de una lente y de un sistema de lentes yuxtapuestas. — Idea de las principales aberraciones de lentes y espejos. — Diafragmas y pupilas de un sistema. — Espejos esféricos y espejos planos: deducción de las fórmulas. — Espejos planos. — *Prácticas.*

XXIV. INSTRUMENTOS ÓPTICOS 357

El ojo como instrumento óptico. — Defectos de convergencia y de acomodación. — Agudeza visual. — Lupa. — Microscopio. — Anteojo astronómico. — Anteojo terrestre. — Cámara fotográfica. — Aparato de proyección. — *Prácticas.* — *Cuestiones.* — *Problemas.*

APÉNDICE: EJERCICIOS CON RESULTADO Y RESUELTOS 383

OBRAS BASICAS DE FORMACION CULTURAL